A TREATISE

ON THE

INTEGRAL CALCULUS AND ITS APPLICATIONS,

WITH NUMEROUS EXAMPLES,

BY

[illegible]ODHUNTER, M. A., F. R. S.,

TRANSLATED INTO URDU

BY

MUNSHI MAHAMMED ZAKA-UL-LAH,

Head Master, Normal School, Delhi,

IN FURTHERANCE OF THE OBJECTS OF THE SCIENTIFIC SOCIETIES OF ALLYGURH AND SUBA BEHAR.

رسالہ علم حساب الکلیات

اور اُسکے استعمالات معہ بہت سي مثالوں کے

مولفہ

ٹاڈھنٹر صاحب ایم اي ایف آر ایس

جسکو

منشي محمد ذکاءالله صاحب ہیڈ ماسٹر نارمل اسکول دھلي نے

بتائید مقاصد

سینٹیفک سوسئیٹي علیگڈہ و سینٹیفک سوسئیٹي صوبہ بہار کے

اُردو میں ترجمہ کیا

اور

بمقام دھلي مطبع مرتضوي میں باھتمام حاجي

محمد عزیزالدین کے مطبوع ہوا

سنہ ۱۸۷۱ ع

رسالہ علم حساب الکلیات

اور اُسکے استعمالات معہ بہت سی مثالون کے

مؤلفہ

ٹاڈہنٹر صاحب ایم ای ایف آر ایس

جسکو

منشی محمد ذکاء اللہ صاحب ہیڈماسٹر نارمل اسکول دہلی نے

بتائید مقاصد

سینٹیفک سوسیٹی علی گڈہ و سینٹیفک سوسیٹی صوبہ بہار

اردو مین ترجمہ کیا

اور

بمقام دہلی مطبع مرتضوی مین باہتمام حاجی

محمد عزیز الدین کے مطبوع ہوا

سنہ ۱۸۷۲ع

علم حساب الکلیات

باب اول

کلی لینے کے معنی اور مثالین

(۱) علم حساب الجزئیات مین تو مجموعہ قواعد کا وہ بیان کیا گیا ہی کہ جسکی استعانت سے ایک جملہ سی دوسرا جملہ وہ استخراج ہوتا ہی جسکا نام سر جزوی پہلے جملہ کا ہی علم حساب الکلیات مین اسکا عکس ہے یعنی ہم سر جزوی سی وہ جملہ اخذ کرتے ہین جس سے سر جزوی استنباط ہوا تھا لیکن اس سر جزوی سے اوس جملہ کا استنباط کرنا جو باخذ سر جزوی کا تھا علم حساب الکلیات کا موضوع نہین ہے بلکہ موضوع اوسکا یہہ ہی کہ چھوٹی چھوٹی ارقام کے سلسلہ غیر متناہی کو جمع کرین اور یہہ چھوٹی چھوٹی رقمین حدود معین نہ رکھین اور ایسی سلسلہ کے جمع کرنیمین ہمکو اکثر ضرورت اسکی پڑتی ہے کہ وہ جملہ دریافت کرین جو باخذ سر جزوی معلوم کا ہو اب ہم اسکو ثابت کرتے ہین

(۲) فرض کرو کہ مج (لا) جملہ لا کا ایسا ہی کہ وہ ہمیشہ متناہی رہتا ہی اور دو معین قیمتون ط اور ص کے درمیان جو لا کے تمام قیمتین واقع ہون اونکی درمیان پیوستہ رہتا ہے اور لا۱، لا۲ ... لان-۱ ایک سلسلہ قیمتون کا ط اور ص کے درمیان ایسا ہی کہ ط، لا۱، لا۲ ... لان-۱، ص مین بلحاظ مقدار کے ترتیب تصاعدی یا ترتیب تنازلی ہے

پس اب دعوی یہہ ہے کہ سلسلہ

(لا۱ — ط) مج (ط) + (لا۲ — لا۱) مج (لا۱) + (لا۳ — لا۲) مج (لا۲) + ...
+ (ص — لان-۱) مج (لان-۱)

کی حد غائی جب دریافت کرین کہ لا۱ — ط اور لا۲ — لا۱ ... ص — لان-۱

کلی لینے کے ... معنی

اب مج ھہ ق چہوٹا بہ نسبت (ص — ط) ق کے ہے اسمین ق سب سے بڑی مقدار کو مقادیر ق۱ و ق۲ ۰ ۰ ۰ ق ن مین سے تعبیر کرتا ہے اسسے معلوم ہوا کہ مج ھہ ق اخرکار معدوم ہوتا ہی اور اسسے یہہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب اون مقادیر مین سے کہ جنکا معلم ∆ لا ہی ہر ایک مقدار غیر محدود کم ہوتی ہے

تو مج مج (لا) ∆ لا کی حد غائی مج (ص) — مج (ط) ہے

(۳) نتیجہ مذکور کی کتابت کا طریقہ یہہ ہے کہ

ط مج ص ط مج ص مج (لا) ز لا = مج (ص) — مج (ط)

یہ رمع اختصار لفظ حاصل جمع کا ہے اور مج مج (لا) ∆ لا ز لا حو ∆ لا ہے اوسکو ز لا تعبیر کرتا ہے

(۴) فرض کرو کہ ھہ۱ و ھہ۲ ۰ ۰ ھہ ن سب آپسمین برابر ہین تو ہر ایک مقدار اونمین سے برابر ص — ط / ن کے ہوگی اور لا ر برابر ا + ر/ن (ص — ط) ہے اسسے معلوم ہوا کہ ط مج ص مج (لا) ز لا کے معنی یہہ ہین کہ ص — ا کو ن برابر حصون مین تقسیم کرو جنمین سے ہر ایک برابر ھہ کے ہو اور مج (لا) مین لا کی جگہہ متواتر ط و ط + ھہ و ط + ۲ ھہ ۰ ۰ ۰ ط + (ن — ا) ھہ رکہو اور ان قیمتون کو جمع کرو اور حاصل جمع کو ھہ مین ضرب دو اور پہر ھہ کو غیر متناہی کم کرو

اگر یہہ اعمال کئے جائین تو یہہ نتیجہ مج (ص) — مج (ط) حاصل ہوگا اسمین مج (لا) وہ جملہ ہے جسکا سر جزوی بلحاظ لا کے مج (لا) ہے

اب طالب علم بہت غور اور توجہ اور احتیاط سے دیکہے کہ علم حساب الکلیات ایک خاص مسئلہ پر اور ایک خاص طریقہ کتابت پر مبنی ہی مسئلہ تو یہہ ہے کہ فرض کرو مج (لا) ایک جملہ لا کا ہی اور اوسکا سر جزوی بلحاظ لا کے مج (لا) ہے اور ن مثبت صحیح ہے اور ن ھہ = ص — ط اور مج (لا) محدود اور پیوستہ لا کے اون تمام قیمتون کے درمیان فرض کیا گیا ہے جو ط اور ص کے درمیان واقع ہون تو جب ن غیر محدود زیادہ ہو تو حد غائی

ھہ [مج (ط) + مج (ط + ھہ) + مج (ط + ۲ ھہ) + ۰ ۰ + مج (ص — ھہ)]

کی مج (ص) — مج (ط) ہے

اب طریقہ کتابت یہ ہے کہ اس حد غائی کو طاصمع مج (لا) زلا سے تعبیر کرتے ہین اور

طاصمع مج (لا) زلا = ھج (ص) — ھج (ط)

ایک خاص صورت مین ہم فرض کرتے ہین کہ ط صفر ہو تو ن ھ = ص اور ن جب غیر محدود زیادہ ہو
تو حد غائی

ھ [مج (۰) + مج (ھ) + مج (۲ھ) + ۰ ۰ ۰ + مج (ص − ھ)]

کی صمع مج (لا) زلا ہی اور برابر ھج (ص) — ھج (۰) کے ہے

(۵) ایک اکیلی رقم مثلاً مج (لا) Δلا کو اکثر جز ترکیبی کہتے ہین اب اس بات پر توجہ کرنی چاہئے
کہ حد غائی حج مج (لا) Δ لا کی قیمت مین تبدل نہین واقع ہوگا اگر ہم اجزاء ترکیبی محدود تعداد
کے حساب مین نہ لگائین یا اجزاء ترکیبی متماثلہ محدود تعداد کی زیادہ کر دین اسواسطے کہ حد غائی
مین ہر ایک جز ترکیبی غیر محدود چھوٹا ہوتا ہی اور غیر محدود چھوٹی مقادیر جنکی تعداد محدود ہو آخر کو
معدوم ہو جاتی ہین

(۶) اوپر کی عمل کو کلی لینا یا کلی نکالنا کہتے ہین اور مقدار طاصمع مج لا کو کلی معرفہ یا محدود اور ط و ص کو
حدود غائی کلی کی کہتے ہین چونکہ قیمت اس کلی محدود کی ھج (ص) — ھج (ط) ہے
اسلئے جملہ مج (لا) کی جب حدود غائی معینہ کے درمیان کلی لین تو ہم اول جملہ ھج (لا) کو
دریافت کرین جسکا ھج (لا) سر جزوی ہو اور مج (لا) اور ھج (لا) کے درمیان جو ربط ہے
وہ اسطرح تعبیر ہوتا ہے کہ

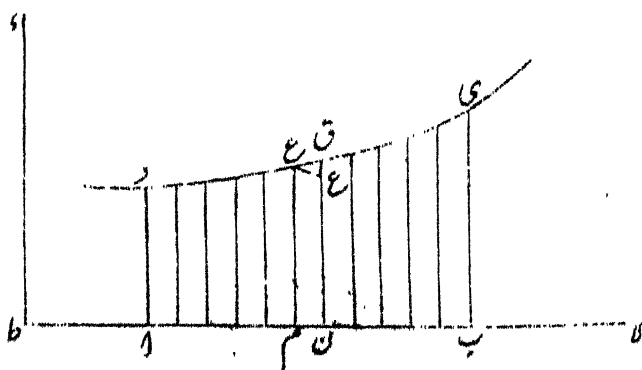
مج (لا) = ز ھج (لا) / ز لا

اور اسکو اس مساوات سے بھی تعبیر کرتے ہین کہ

مع مج (لا) زلا = ھج (لا)

ایسی مساوات مین جیسے کہ یہہ آخر مساوات ہی جب حدود غائی معین نہ ہون تو فقط یہہ کہا کرتے ہین کہ
ھج (لا) وہ جملہ ہے جسکا سر جزوی لینے سے مج (لا) پیدا ہوتا ہی اور ھج (لا) کو

کلی کو غیر معرف یا غیر معین (لا) کی کہتے ہین

(۷) علم حساب الکلیات کی ایجاد اور تدوین کے اسباب بہت سی مسائل ہین منجملہ اونکے یہہ بہی ایک مسئلہ ہی کہ خطوط سے جو سطوح احاطہ ہوتی ہین اونکے رقبے کس طرح دریافت کرین اسی مسئلہ کو بیان کرکے ہم دفعات بالا کے مقاصد کی تشریح کرتے ہین

فرض کرو کہ ق ع ی ایک خط منحنی ہے اور اوسکی مساوات ی = مج (لا) ہی اب مقصد ہمارا یہہ ہے کہ وہ سطح جو اس خط منحنی اور محور لا لا اور ان معینون کے درمیان جو موافق محدود ط اور ص کے لئے جائین واقع ہے اوسکا رقبہ دریافت کرین فرض کرو کہ $\overline{\text{اط}}$ = ط اور $\overline{\text{طب}}$ = ص بعد اب کو ن برابر ہون مین تقسیم کرو اور نقاط تقسیم سے معین کہیچو فرض کرو کہ $\overline{\text{طم}}$ = ط + (ر − ۱) ھ تو متوازی الاضلاع $\overline{\text{ع م ن عَ}}$ کا رقبہ

ھ مج [ط + (ر − ۱) ھ]

اس صورت بیانیہ مین ر کی ان تمام قیمتون کے مقرر کرنے سے جو ۱ اور ن کے بیچ واقع ہون جو حاصل جمع دریافت ہوگا وہ رقبہ مطلوب سے تفاوت اتنا رکہیگا جتنا کہ مجموعہ اون تمام حصص کا ہی جو متشابہ مثلث ع ق عَ کے ہین اور چونکہ اون شکلون مین سے جنمین سے ایک $\overline{\text{ع م ن ق}}$ ہے سب سی بڑی شکل سے یہہ آخر مجموعہ بظاہر کم معلوم ہوتا ہے تو ہم ھ کو کم کرکے ایک نتیجہ ایسا حاصل کر سکتے ہین کہ وہ رقبہ مطلوب سے اسقدر کم ہو جسقدر ہم چاہین اسکواسطے رقبہ منحنی حد غائی اس سلسلہ

کلی کا استعمال

ھہ [مج (ط) + مج (ط + ھہ) + مج (ط + ۲ ھہ) + ۰۰۰۰ + مج (ص − ھہ)]

کی برابر ھج (ص) − ھج (ط) ہے

(۸) اگر ھج (لد) سے ایک جملہ مج (لد) سر جزوی لینے سے پیدا ہوتا ہو تو ہم اوسکو اس مساوات سے تعبیر کیا کرتے ہین کہ

مع مج (لد) زلد = ھج (لد)

اب ہم ترکیبین ھج (لد) کی دریافت کرنے کی جب مج (لد) معلوم ہو بیان کرتے ہین ہم نے دفعہ ۳۰۱ علم حساب الجزئیات مین ثابت کیا ہے کہ اگر دو جملے ایک ہی سر جزوی بلحاظ کسی مقدار متغیر کے رکھین تو اونمین تفاوت کسی مقدار کا مستقل ہو سکتا ہے اسے معلوم ہوا کہ اگر ھج (لد) ایک جملہ ہو اور مج (لد) اوسکا سر جزوی بلحاظ لد کے ہو تو ھج (لد) + س جسمین س ایک مقدار بالکل بے لگاؤ لد سے ہی فقط ایسی ایک ہی صورت ہو سکتی ہے کہ جسکا سر جزوی وہی ہو جو پہلے تھا

پس طلبہ کو تہوڑے عرصہ تک یہی معلوم ہوگا کہ جزئیات کا عکس کلیات ہی اور کلی لینا سر جزوی لینے کا عکس ہے لیکن ہم نے اس علم کا آغاز تجمیع سے کیا ہی کیونکہ یہہ تجمیع علم حساب الکلیات کا مقصد اعظم اور مطلب اہم ہے

ہم اس بات کو دیکھتے ہین کہ مج۱ (لد) اور مج۲ (لد) جملے لد کے ہون تو

مع [مج۱ (لد) + مج۲ (لد)] = مع مج۱ (لد) زلد + مع مج۲ (لد) زلد

یعنی غایت یہہ ہے کہ جن دو جملون کو برابر لکھتے ہین وہ صرف مقدار مستقل کا فرق رکھہ سکتے ہین کیونکہ اگر ہم دونون کی سر جزوی لین تو ایک ہی نتیجہ یعنی مج۱ (لد) + مج۲ (لد) حاصل ہوتا ہے

اور نیز اگر س کوئی مقدار مستقل ہو تو

مع س مج (لد) زلد = س مع مج لد (زلد)

یعنی غایت یہہ ہے کہ دو جملے صرف مقدار مستقل کا تفاوت رکھہ سکتے ہین

(۹) بلاواسطہ کلی کا نکالنا

جب ایک جملہ سرجزوی دوسری جملہ کا سمجھا جاوے تو ہم اول جملہ کی کلی کو جان جاوینگے ذیل مین تمام فہرست ایسے سادہ جملون کی لکھی ہے

$$\text{مع}\ \text{لا}^{\text{م}}\,\text{زلا} = \frac{\text{لا}^{\text{م}+1}}{\text{م}+1} \qquad \text{مع}\ \frac{\text{زلا}}{\text{لا}} = \text{لوک لا}$$

$$\text{مع}\ \text{ا}^{\text{لا}}\,\text{زلا} = \frac{\text{ا}^{\text{لا}}}{\text{لوک}_{\text{ی}}\,\text{ا}} \qquad \text{مع}\ \text{ی}^{\text{لا}}\,\text{زلا} = \text{ی}^{\text{لا}}$$

$$\text{مع جب لا زلا} = -\,\text{جم لا} \qquad \text{مع جم لا زلا} = \text{جب لا}$$

$$\text{مع}\ \frac{\text{زلا}}{\text{جم}^2\,\text{لا}} = \text{مس لا} \qquad \text{مع}\ \frac{\text{زلا}}{\text{جا}^2\,\text{لا}} = -\,\text{مم لا}$$

$$\text{مع}\ \frac{\text{زلا}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}} = \text{جب}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\ \ \text{یا}\ \ = -\,\text{جم}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$$

$$\text{مع}\ \frac{\text{زلا}}{\text{ا}^2 + \text{لا}^2} = \frac{1}{\text{ا}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\ \ \text{یا}\ \ = -\frac{1}{\text{ا}}\,\text{مم}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$$

(۱۰) اندراج سے کلی کا نکالنا

عمل کلی نکالنے کا بعض اوقات اسطرح آسان ہوجاتا ہے کہ مقدار متغیر کی جگہہ ایک حصہ نئی مقدار متغیر کا درج کرین فرض کرو کہ جملہ مج (لا) کی کلی نکالنی ہے اور ا اور ب حدود غائی کلی کی مین اب ظاہر ہے کہ ہم لا کو جملہ کسی جدید مقدار متغیر ے کا فرض کرسکتے ہین بشرطیکہ کہ جملہ منتخب قابلیت اسکی رکھتا ہو کہ اوسمین تمام قیمتین لا کی جو کلی مین مطلوب ہون فرض کرسکین پس لا = ح (ے) کے رکہو اور اَ اور بَ قیمتین ے کی فرض کرو جو ح (ے) بالکل برابر ا اور ب کے جداگانہ کرین پس ا = ح (اَ) اور ب = ح (بَ) اب فرض کرو کہ ھج (لا) وہ جملہ ہو جسکا مج (لا) سرجزوی ہے یعنی یہہ فرضکرو کہ $\text{مج (لا)} = \frac{\text{ز ھج (لا)}}{\text{زلا}}$ تو

$$\text{مع}_{\text{ا}}^{\text{ب}}\ \text{مج (لا) زلا} = \text{ھج (ب)} - \text{ھج (ا)}$$

$$= \text{ھج}\left[\text{ح (بَ)}\right] - \text{ھج}\left[\text{ح (اَ)}\right]$$

لیکن موافق اصول علم حساب الجزئیات کے

$$\frac{\text{ز ھج}\left[\text{ح (ے)}\right]}{\text{زے}} = \text{مج}\left[\text{ح (ے)}\right]\ \text{حَ (ے)}$$

اسواسطے ھج [ح (بَ)] - ھج [ح (اَ)] = اتَّمع مع [ح (ے) حَ (ے)] زے

= اتَّمع مج (لد) زلد/زے زے

پس اتَّمع مج (لد) زلد = اتَّمع مج (لد) زلد/زے زے

اس نتیجہ کو نہایت سادی صورت میں اسطرح سے لکھتے ہیں کہ

مع مج (لد) زلد = مع مج (لد) زلد/زے زے

بشرطیکہ ہم اس بات کو خوب یاد رکھیں کہ پہلی کلی خاص حدود غائی ا اور ب کے درمیان لیگئی ہے اور دوسری کلی حدود غائی اَ اور بَ کے درمیان

(۱) دفعہ گذشتہ کی مثال یہہ بھی کہ مع زلد/√(۲ ا لد − لد۲) مطلوب ہے

فرضکرو کہ لد = ا − ے تو زلد/زے = −۱ اور ۲ ا لد − لد۲ = ا۲ − ے۲ پس

مع زلد/√(۲ ا لد − لد۲) = مع ۱/√(۲ ا لد − لد۲) زلد/زے زے = − مع زے/√(ا۲ − ے۲)

= جم۱ − ے/ا = جم۱ (ا − لد)/ا = جع۱ لد/ا

اب فرض کرو کہ مع زلد/(لد √(۲ ا لد − ا۲)) مطلوب ہے لد = ا/ے کے مقرر کرو تو

زلد/زے = ا/(ا − ے۲) اور مع زلد/(لد√(۲ ا لد − ا۲)) = مع ۱/(لد√(۲ ا لد − ا۲)) زلد/زے زے

= مع زے/(ا √(۲ ا (ا − ے) − (ا − ے)۲)) = ۱/ا مع زے/√(ا۲ − ے۲)

= ۱/ا حت۱ ے = ۱/ا حت۱ (لد − ا)/لد

یہاں جو کلیاں نکالنے کے واسطے پیش ہوئیں ہم نے لد کی جگہہ اندراج کرنے سے اونکو اسطرح نکالا ہے جس طرح کہ دفعہ گذشتہ میں بیان ہوا ہی اس عمل سے بعض اوقات کلی کا نکالنا آسان ہوگا مگر کوئی قاعدہ نہیں ہے کہ جسکی ہدایت کے موافق طلبہ اندراج کے واسطے جو فرض کریں وہ سب سے اچھا ہو اسلئے یہہ امر طلبہ کی تجربہ اور مشق پر چھوڑ دیا جاتا ہی

(۱۲) بالاجزا کلی کا نکالنا

مساوات ز لو مو/زلد = لو زمو/زلد + مو زلو/زلد

کی طرفین کی کلی نکالنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

مثال (۲) مع $\frac{ز لا}{\sqrt{لا^۲ + ا^۲}}$

فرض کرو کہ $\sqrt{لا^۲ + ا^۲} = ے - لا$ اسواسطے $ا^۲ = ے^۲ - ۲ ے لا$

$$\therefore \frac{ز لا}{ز ے} = \frac{ے - لا}{ے}$$

اسسے معلوم ہوا کہ مع $\frac{ز لا}{\sqrt{لا^۲+ا^۲}}$ = مع $\frac{۱}{\sqrt{لا^۲+ا^۲}} \cdot \frac{ز لا}{ز ے}$ ز ے = مع $\frac{ز ے}{ے}$ = لوک ے

= لوک $\left[لا + \sqrt{لا^۲ + ا^۲} \right]$

مثال (۳) مع $\frac{ز لا}{\sqrt{لا^۲ - ا^۲}}$

مثال (۲) کی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ماحصل یہہ ہے

لوک $\left[لا + \sqrt{لا^۲ - ا^۲} \right]$

مثال (۴) مع $\sqrt{لا^۲ + ا^۲}$ ز لا

مع $\sqrt{لا^۲+ا^۲}$ ز لا = لا $\sqrt{لا^۲+ا^۲}$ − مع $\frac{لا^۲ ز لا}{\sqrt{لا^۲+ا^۲}}$ بموجب دفعہ ۱۲ کے

اور نیز مع $\sqrt{لا^۲+ا^۲}$ ز لا = مع $\frac{لا^۲+ا^۲}{\sqrt{لا^۲+ا^۲}}$ ز لا = مع $\frac{لا^۲ ز لا}{\sqrt{لا^۲+ا^۲}}$ + $ا^۲$ مع $\frac{ز لا}{\sqrt{لا^۲+ا^۲}}$

اسواسطے جمع کرنے سے

۲ مع $\sqrt{لا^۲+ا^۲}$ ز لا = لا $\sqrt{لا^۲+ا^۲}$ + $ا^۲$ مع $\frac{ز لا}{\sqrt{لا^۲+ا^۲}}$

اسواسطے مع $\sqrt{لا^۲+ا^۲}$ ز لا = $\frac{لا\sqrt{لا^۲+ا^۲}}{۲} + \frac{ا^۲}{۲}$ لوک $\left[لا + \sqrt{لا^۲+ا^۲} \right]$

اور علیٰ ہذا القیاس مع $\sqrt{لا^۲-ا^۲}$ ز لا = $\frac{لا\sqrt{لا^۲-ا^۲}}{۲} - \frac{ا^۲}{۲}$ لوک $\left[لا + \sqrt{لا^۲-ا^۲} \right]$

مثال (۵) مع $\frac{ز لا}{\sqrt{ا + ب لا + س لا^۲}}$

مع $\frac{ز لا}{\sqrt{ا + ب لا + س لا^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{س}}$ مع $\frac{ز لا}{\sqrt{\frac{ا}{س} + \frac{ب}{س} لا + لا^۲}}$

$= \frac{۱}{\sqrt{س}}$ مع $\frac{ز لا}{\sqrt{\left(لا + \frac{ب}{۲س}\right)^۲ + \frac{۴ ا س - ب^۲}{۴ س^۲}}}$

$لا + \frac{ب}{۲س} = ے$ کے رکھو تو (۲) اور (۳) کے کلّی یہہ ہو جائیگی کہ

$\frac{۱}{\sqrt{س}}$ لوک $\left[۲ س لا + ب + ۲\sqrt{س}\sqrt{ا + ب لا + س لا^۲} \right]$

اب یہاں مقدار مستقل $\frac{۱}{\sqrt{س}}$ لوک ۲ س کو ساقط کرتے ہیں

اور علیٰ ہذالقیاس ے = لا + ب/۲س مقرر کرنے سے ہم

مع ہا√(ا + ب لا + س لا۲) زلا کو موقوف (۴) مثال پر کر سکتے ہین

مثال (۶) مع زلا / ہا√(ا + ب لا − س لا۲)

مع زلا / ہا√(ا + ب لا − س لا۲) = ۱/ہا√س مع زلا / ہا√(ا/س + ب/س لا − لا۲)

= ۱/ہا√س مع زلا / ہا√((۴ اس + ب۲)/۴س۲ − (لا − ب/۲س)۲)

(۴ اس + ب۲)/۴س۲ کی جگہہ ھـ۲ اور لا − ب/۲س کی جگہہ ے رکھو تو کلی کی یہہ صورت ہوگی کہ

۱/ہا√س مع زے / ہا√(ھـ۲ − ے۲) اس سے یہہ اخذ ہوتا ہے کہ ۱/ہا√س جت۱ ے/ھـ یا

۱/ہا√س جت۱ (۲س لا − ب) / ہا√(۴ اس + ب۲)

اسیطرح ے = لا − ب/۲س کے فرض کرنے سے ہم مع ہا√(ا + ب لا − س لا۲) زلا کو

مثال (۱) پر موقوف کر سکتے ہین

مثال (۷) مع زلا / لا ہا√(لا۲ − ا۲)

لا = ۱/ی کے رکھو تو مع زلا / لا ہا√(لا۲ − ا۲) = مع ۱ / لا ہا√(لا۲ − ا۲) · زلا/زی زی

= − مع زی / ہا√(۱ − ا۲ی۲) = − ۱/ا مع زی / ہا√(۱/ا۲ − ی۲) = − ۱/ا جت۱ ا ی

= − ۱/ا جت۱ ا/لا

چونکہ جت۱ ا/لا + جتم۱ ا/لا = ط/۲ ایک مقدار مستقل ہے تو آخر نتیجہ کو ہم اسطرح لکھہ سکتے ہین کہ

مع زلا / لا ہا√(لا۲ − ا۲) = ۱/ا جتم۱ ا/لا

مثال (۸) مع زلا / لا ہا√(لا۲ ± ا۲)

لا = ۱/ی کے اوسیطرح رکھو جسطرح مثال (۷) مین رکھا تھا تو نتیجہ مطلوب یہہ استنباط ہوگا کہ

۱/ا لوگ لا / (ا + ہا√(ا۲ ± لا۲))

مثال (۹) مع زلا / (لا − ا)م اور مع زلا / (لا − ا)

$$\text{مع}\ \frac{\text{ز لا}}{(\text{لا}-\text{ا})^{\text{م}}} = -\frac{1}{\text{م}-1}\cdot\frac{1}{(\text{لا}-\text{ا})^{\text{م}-1}}$$

$$\text{مع}\ \frac{\text{ز لا}}{\text{لا}-\text{ا}} = \text{لوگ}\ (\text{لا}-\text{ا})$$

اگر بائین طرف کے ارکان مساوات کا کسر جزوی لین تو اوپر کے نتایج بدیہی معلوم ہوتے ہین

مثال (۱۰) $\text{مع}\ \frac{\text{ز لا}}{\text{لا}^2-\text{ا}^2}$

$$\text{مع}\ \frac{\text{ز لا}}{\text{لا}^2-\text{ا}^2} = \frac{1}{2\text{ا}}\ \text{مع}\ \left(\frac{1}{\text{لا}-\text{ا}} - \frac{1}{\text{لا}+\text{ا}}\right)\text{ز لا}$$

$$= \frac{1}{2\text{ا}}\ \text{مع}\ \frac{\text{ز لا}}{\text{لا}-\text{ا}} - \frac{1}{2\text{ا}}\ \text{مع}\ \frac{\text{ز لا}}{\text{لا}+\text{ا}}$$

$$= \frac{1}{2\text{ا}}\ \text{لوگ}(\text{لا}-\text{ا}) - \frac{1}{2\text{ا}}\ \text{لوگ}(\text{لا}+\text{ا})$$

$$= \frac{1}{2\text{ا}}\ \text{لوگ}\ \frac{\text{لا}-\text{ا}}{\text{لا}+\text{ا}}$$

اسمین $\frac{\text{لا}-\text{ا}}{\text{لا}+\text{ا}}$ مثبت فرض ہوتا ہے اگر $\frac{\text{لا}-\text{ا}}{\text{لا}+\text{ا}}$ منفی ہو تو ہمکو اسطرح لکھنا چاہیئے کہ

$$\text{مع}\ \frac{\text{ز لا}}{\text{لا}^2-\text{ا}^2} = \frac{1}{2\text{ا}}\ \text{لوگ}\ \frac{\text{ا}-\text{لا}}{\text{ا}+\text{لا}}$$

مثال (۱۱) $\text{مع}\ \frac{\text{ز لا}}{\text{ا}+\text{ب لا}+\text{س لا}^2}$

$$\text{مع}\ \frac{\text{ز لا}}{\text{ا}+\text{ب لا}+\text{س لا}^2} = \frac{1}{\text{س}}\ \text{مع}\ \frac{\text{ز لا}}{\left(\text{لا}+\frac{\text{ب}}{2\text{س}}\right)^2 + \frac{4\text{اس}-\text{ب}^2}{4\text{س}^2}}$$

اگر $\frac{4\text{اس}-\text{ب}^2}{4\text{س}^2}$ منفی ہو تو موافق مثال (۱۰) کے ہم کلی نکال سکتے ہین

$$\frac{1}{\sqrt{\text{ب}^2-4\text{اس}}}\ \text{لوگ}\ \frac{2\text{س لا}+\text{ب}-\sqrt{\text{ب}^2-4\text{اس}}}{2\text{س لا}+\text{ب}+\sqrt{\text{ب}^2-4\text{اس}}}$$

اگر $\frac{4\text{اس}-\text{ب}^2}{4\text{س}^2}$ مثبت ہو تو بموجب دفعہ ۹ کے کلی یہہ ہے کہ

$$\frac{2}{\sqrt{4\text{اس}-\text{ب}^2}}\ \text{مس}^{-1}\ \frac{2\text{س لا}+\text{ب}}{\sqrt{4\text{اس}-\text{ب}^2}}$$

مثال (۱۲) $\text{مع}\ \frac{\text{ا}'\text{لا}+\text{ب}'}{\text{ا}+\text{ب لا}+\text{س لا}^2}\ \text{ز لا}$

$$\text{مع}\ \frac{\text{ا}'\text{لا}+\text{ب}'}{\text{ا}+\text{ب لا}+\text{س لا}^2}\ \text{ز لا} = \text{مع}\ \frac{\text{ا}'\text{لا}+\frac{\text{ا}'\text{ب}}{2\text{س}}+\text{ب}'-\frac{\text{ا}'\text{ب}}{2\text{س}}}{\text{ا}+\text{ب لا}+\text{س لا}^2}\ \text{ز لا}$$

$$= \frac{\text{ا}'}{2\text{س}}\ \text{مع}\ \frac{2\text{س لا}+\text{ب}}{\text{ا}+\text{ب لا}+\text{س لا}^2}\ \text{ز لا} + \left(\text{ب}'-\frac{\text{ا}'\text{ب}}{2\text{س}}\right)\text{مع}\ \frac{\text{ز لا}}{\text{ا}+\text{ب لا}+\text{س لا}^2}$$

اول کی کلی $\frac{\text{ا}'}{2\text{س}}\ \text{لوگ}\ (\text{ا}+\text{ب لا}+\text{س لا}^2)$ اور دوسرے کی کلی مثال ۱۱ مین دریافت ہوئی ہے

مثال ۱۳ $\text{مع}\ \frac{\text{ز لا}}{\text{جم لا}}$

مع $\frac{ز لد}{جم لد}$ = مع $\frac{جم لد ز لد}{جم لد}$ = مع $\frac{ز ے}{۱ - ی}$ اگر ے = جب لد

= $\frac{۱}{۲}$ لوگ $\frac{۱ + ے}{۱ - ے}$ بموجب مثال ۱۰

= $\frac{۱}{۲}$ لوگ $\frac{۱ + جب لد}{۱ - جب لد}$ = لوگ مم $\left(\frac{ط}{۴} - \frac{لد}{۲}\right)$

علیٰ ہذا القیاس مع $\frac{ز لد}{جب لد}$ = لوگ مس $\frac{لد}{۲}$

مثال (۱۴) مع $\frac{ز لد}{ا + ب جم لد}$ اور مع $\frac{ز لد}{ا + ب جب لد}$

مع $\frac{ز لد}{ا + ب جم لد}$ = مع $\frac{ز لد}{ا (جب^۲ \frac{لد}{۲} + جم^۲ \frac{لد}{۲}) + ب (جم^۲ \frac{لد}{۲} - جب^۲ \frac{لد}{۲})}$

= مع $\frac{قط^۲ \frac{لد}{۲} ز لد}{ا + ب + (ا - ب) مس^۲ \frac{لد}{۲}}$

= ۲ مع $\frac{ز ے}{ا + ب + (ا - ب) ے^۲}$ اگر ے = مس $\frac{لد}{۲}$

اس سے معلوم ہوا کہ اگر ا بڑا ب سے ہو تو کلی یہہ ہے کہ

$\frac{۲}{\sqrt{ا^۲ - ب^۲}}$ مس ق ا $\frac{\sqrt{(ا - ب)}}{\sqrt{(ا + ب)}}$ مس $\frac{لد}{۲}$ یا $\frac{۲}{\sqrt{(ا^۲ - ب^۲)}}$ مس ق ا $\frac{\sqrt{(ا - ب)}}{\sqrt{ا + ب}}$

اور اگر ا چھوٹا ب سے ہو تو

$\frac{۱}{\sqrt{(ب^۲ - ا^۲)}}$ لوگ $\frac{\sqrt{(ب + ا)} + \sqrt{(ب - ا)} ے}{\sqrt{(ب + ا)} - \sqrt{(ب - ا)} ے}$

یعنی $\frac{۱}{\sqrt{ب^۲ - ا^۲}}$ لوگ $\frac{\sqrt{(ب + ا)} + \sqrt{(ب - ا)} مس \frac{لد}{۲}}{\sqrt{(ب + ا)} - \sqrt{(ب - ا)} مس \frac{لد}{۲}}$

مع $\frac{ز لد}{ا + ب جب لد}$ کے دریافت کرنے کے لئے فرض کرو کہ لد = $\frac{ط}{۲}$ + ے تو صورت کلی یہہ ہو جائیگی کہ مع $\frac{ز ے}{ا + ب جم ے}$ اور یہ ابھی دریافت ہوئی تھی یا ہم اسطرح عمل کریں

مع $\frac{ز لد}{ا + ب جب لد}$ = مع $\frac{ز لد}{ا (جب^۲ \frac{لد}{۲} + جم^۲ \frac{لد}{۲}) + ۲ ب جب \frac{لد}{۲} جم \frac{لد}{۲}}$

= مع $\frac{قط^۲ \frac{لد}{۲} ز لد}{ا (۱ + مس^۲ \frac{لد}{۲}) + ۲ ب مس \frac{لد}{۲}}$

= ۲ مع $\frac{ز ے}{ا (۱ + ے^۲) + ۲ ب ے}$ اگر ے = مس $\frac{لد}{۲}$

ز = ے + $\frac{ب}{ا}$ کے رکہو تو کلی یہہ ہوگی کہ

مع $\frac{ز ے}{ا + \frac{ب}{ا}}$

اور یہہ حب سابق کے دریافت ہوسکتا ہے

مثال (۱۵) فرض کرو کہ هج (لا) جملہ لا کو اور هج$^{-1}$ (لا) جملہ معکوس کو تعبیر کرتا ہے

پس هج [هج$^{-1}$ (لا)] = لا اگر کلی هج (لا) کے دریافت ہوسکتی ہو تو کلی

هج$^{-1}$ (لا) کی بہی دریافت ہوجائیگی اس کلی دریافت کرنیکے واسطے

مع هج$^{-1}$ (لا) زلا پر خیال کرو اور هج$^{-1}$ لا = ے کے رکہو تو

لا = هج (ے) پس

مع هج$^{-1}$ (لا) زلا = مع ے $\frac{زلا}{زے}$ زے = ے لا − مع لا زے = ے لا − مع هج زے

ان مثالوں مین سے ہر مثال مین ہم نے کلی غیر محدود دریافت کی ہے تو ہم بلا واسطہ کلی محدود

حدود نمائی معین مین دریافت کرسکتے ہین مثلاً اس سبب سے کہ

مع $\frac{زلا}{(لا^2 + ا^2)^{\frac{1}{2}}}$ = لوک | لا + (لا^2 + ا^2)$^{\frac{1}{2}}$ |

اسواسطے $\int_{ا}^{۲ا}$ $\frac{زلا}{(لا^2 + ا^2)^{\frac{1}{2}}}$ = لوک [۲ا + (۴ا^2 + ا^2)$^{\frac{1}{2}}$] − لوگ [ا + (ا^2 + ا^2)$^{\frac{1}{2}}$] = لوگ $\frac{۲ + \sqrt{۵}}{۱ + \sqrt{۲}}$

(۱۵) کلی مع لا$^{م-1}$ (ا + ب لا^ن)$^{\frac{ع}{ق}}$ زلا کی اگر $\frac{ع}{ق}$ ثبت ہو تو بلاواسطہ دریافت ہوسکتی ہے

اسواسطے کہ (ا + ب لا^ن)$^{\frac{ع}{ق}}$ کو موجب ضابطہ جملہ ثنائی کے قوا لا کے سلسلہ متناہی مین

پہیلا سکتے ہین اور ہر ایک رقم اس سلسلہ اور لا$^{م-1}$ کے حاصل ضرب کی کلی بلاواسطہ ہوگی اور دو

اور صورتین بہی ہین جنمین کہ کلی بلاواسطہ نکل سکتی ہی

فرضکرو کہ ا + ب لا^ن = ط^ق

اسواسطے لا = $\left(\frac{ط^ق - ا}{ب}\right)^{\frac{1}{ن}}$ $\frac{زلا}{زط}$ = $\frac{ق}{ن ب}$ ط$^{ق-1}$ $\left(\frac{ط^ق - ا}{ب}\right)^{\frac{1}{ن} - 1}$

اسے معلوم ہوا کہ مع لا$^{م-1}$ (ا + ب لا^ن)$^{\frac{ع}{ق}}$ زلا = مع لا$^{م-1}$ (ا + ب لا^ن)$^{\frac{ع}{ق}}$ $\frac{زلا}{زط}$ زط

= $\frac{ق}{ن ب}$ مع ط$^{ع + ق - 1}$ $\left(\frac{ط^ق - ا}{ب}\right)^{\frac{م}{ن} - 1}$ زط

مثالیت

کلی مثالیہ کی

اگر $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ مثبت صحیح ہو تو $(\text{طو}^{\text{ق}}-\text{ا})^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}-1}$ کو ایک سلسلہ متناہی میں قوا طو کے پہیلا سکتے ہیں اور ہر ایک رقم حاصل ضرب اس سلسلہ اور $\text{طو}^{\text{ع}+\text{ق}-1}$ کی تکملی بلاواسطہ ہوگی

پہر $\int \text{لا}^{\text{م}-1}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}})^{\frac{\text{ع}}{\text{ق}}}\,\text{ز لا} = \int \text{لا}^{\frac{\text{ن ع}}{\text{ق}}+\text{م}-1}(\text{ا}\,\text{لا}^{-\text{ن}}+\text{ب})^{\frac{\text{ع}}{\text{ق}}}\,\text{ز لا}$

اور بموجب صورت اول کے اگر $\frac{\text{م}+\frac{\text{ن ع}}{\text{ق}}}{-\text{ن}}$ مثبت ہو یعنی اگر $\frac{\text{م}}{\text{ن}}+\frac{\text{ع}}{\text{ق}}$ منفی صحیح ہو تو یہہ تکملی بلاواسطہ ہی او لے سکتے ہیں اگر $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ منفی صحیح تہا تو تکملی لا بہی دریافت ہو سکتی ہے اسکا ذکر دوسرے باب میں کرینگے اور علی ہذا القیاس دوسری صورت میں اگر $\frac{\text{م}}{\text{ن}}+\frac{\text{ع}}{\text{ق}}$ مثبت صحیح ہو تو ہم نہیں کہہ سکتے ہیں کہ تکملی بلاواسطہ ہی اسواسطے کہ ایسی صورتوں میں بہت سے استحالوں کی ضرورت ہوتی ہے

مثال ۱ $\int \text{لا}^{2}(\text{ا}+\text{لا})^{\frac{1}{2}}\,\text{ز لا}$

یہان $\frac{\text{م}}{\text{ن}}=3$ فرض کرو کہ $\text{ا}+\text{لا}=\text{طو}^{2}$ تو تکملی کی یہہ صورت ہوگی

$2\int(\text{طو}^{2}-\text{ا})^{2}\,\text{طو}^{2}\,\text{ز طو}$ یا $2\int(\text{طو}^{6}-2\,\text{ا}\,\text{طو}^{4}+\text{ا}^{2}\,\text{طو}^{2})\,\text{ز طو}$

اسے یہہ حاصل ہوتا ہے

$$2\left[\frac{\text{طو}^{7}}{7}-\frac{2\,\text{ا}\,\text{طو}^{5}}{5}+\frac{\text{ا}^{2}\,\text{طو}^{3}}{3}\right]$$

پس $\int \text{لا}^{2}(\text{ا}+\text{لا})^{\frac{1}{2}}\,\text{ز لا} = 2(\text{ا}+\text{لا})^{\frac{3}{2}}\left[\frac{(\text{ا}+\text{لا})^{2}}{7}-\frac{2\,\text{ا}}{5}(\text{ا}+\text{لا})+\frac{\text{ا}^{2}}{3}\right]$

مثال (۲) $\int \frac{\text{ز لا}}{\text{لا}^{2}(1+\text{لا}^{2})^{\frac{1}{2}}}$

یہان $\text{م}=-1$ اور $\text{ن}=2$ اور $\frac{\text{ع}}{\text{ق}}=-\frac{1}{2}$ اسواسطے $\frac{\text{م}}{\text{ن}}+\frac{\text{ع}}{\text{ق}}=-1$

فرض کرو کہ $\text{لا}^{-2}+1=\text{طو}^{2}$ اسواسطے $\text{لا}^{2}=\frac{1}{\text{طو}^{2}-1}$ $\frac{\text{ز لا}}{\text{ز طو}}=-\frac{\text{طو}}{(\text{طو}^{2}-1)^{\frac{3}{2}}}$

اور نیز $\int \frac{\text{ز لا}}{\text{لا}^{2}(1+\text{لا}^{2})^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{\frac{\text{ز لا}}{\text{ز طو}}}{\text{لا}^{3}(\text{لا}^{-2}+1)^{\frac{1}{2}}}\,\text{ز طو}$

لا اور $\frac{\text{ز لا}}{\text{ز طو}}$ کی جگہہ اونکی قیمتیں مندرج کرو تو یہہ ہو جاویگا کہ $-\int \text{ز طو}$

جو $=-\text{طو}$ یا $-\frac{(\text{لا}^{2}+1)^{\frac{1}{2}}}{\text{لا}}$

مثال ۳ $\int \frac{\text{ز لا}}{(\text{ا}^{2}+\text{لا}^{2})^{\frac{3}{2}}}$

باب دوم

کسور ناطقہ

(۱۶) اب ہم ایسی صور بیانیہ کی کلی نکالنے کی ترکیب لکھتے ہین

ا + ب لا + س لا۲ + ص لا۳
―――――――――――――
ا + ب لا + س لا۲ + ... + ن لان

اسمین ا اور ب ... اور ا اور ب ... مقادیر مستقل ایسے ہین کہ دونو شمار کنندہ اور نسبنما محدود ناطقہ جملے لا کے ہین اگر م برابر ن کے ہو یا بڑا ان سے ہو تو ہم عمل تقسیم سے کسر کی تحویل ایسی صورت مین کر سکتے ہین کہ اوسمین لا کا صحیح جملہ ہو اور ایک کسر اوسکے ساتھہ ہو جسمین شمار کنندہ ادنی درجہ کا بہ نسبت نسب نما کے ہو اور چونکہ جملہ صحیحہ لا کے بلاواسطہ کلی نکل سکتی ہے اسلیے کسر ہی کی طرف فقط متوجہ ہونا چاہیے اس کسر مین اقل مرتبہ یہہ ہے کہ شمار کنندہ کا نسب نما سے ایک درجہ کم ہو اب اس کسر کی کلی نکالنے کے واسطے ہم اس کسر کی تجزی کسور جزئیہ کے سلسلہ کسور مین کرتے ہین اور یہہ کسور نہایت سادہ وضع ہوتی ہین اور اونکا نام کسور جزئیہ ہی اور اب ہم اسکا امکان ثابت کرتے ہین فرض کرو کہ مو/لو ایک کسر ناطق بدرجہ غایت مختصر ہو اور اوسکی تجزی سلسلہ کسور جزئیہ مین منظور ہو فرض کرو کہ مو ایک جملہ لا کا ن درجہ کا ہی اور لو ایک جملہ لا کا (ن - ۱) وین درجہ کا بدرجہ غایت ہی تو مو مین لان کے امثال کو واحد مقرر کرین تو اسے کچھہ تعمیم مین نقص نہین عاید ہوگا فرض کرو

مو = (لا - ط) (لا - ص)ر (لا۲ - ۲ سہ لا + سہ۲ + صہ۲) (لا۲ - ۲ لر لا + لر۲ + مر۲)صو

پس مساوات مو = ۰ مین یہہ حاصل ہوگا کہ

(۱) ایک حقیقی قیمت = ط

(۲) تساوی حقیقی قیمتون مین ہر یک = ص

(۳) ایک زوج خیالی قیمتون کا سہ ± صہ √(-۱)

(۴) صو زوج خیالی قیمتون کے ضمن سے ہر یک لر ± مر √(-۱)

مسائل معادلات کے موافق مو حاصل ضرب اون اجزاء ضربی کا ہے جنکی صورت ہم نے اوپر فرض کی ہے

اور اجزاء ضربی کی تعداد کم بیش ہوئی

چونکہ ن درجہ کا مو ہی اسواسطے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ا + ر + ۲ + ۲ صو = ن

فرض کرو کہ مو/لو = ا/(لا - ط) + ب/(لا - ص)^ر + ب/(لا - ص)^(ر-۱) + ب/(لا - ص)^(ر-۲) + ... + ب/(لا - ص)
+ (س لا + د)/(لا^۲ - ۲ سہ لا + سہ^۲ + صہ^۲)
+ (ی لا + ق)/(لا^۲ - ۲ ل لا + ل^۲ + ق^۲)^صو + (ی لا + ق)/(لا^۲ - ۲ ل لا + ل^۲ + ل^۲)^(صو-۱) + ... + (ی صو لا + ق صو)/(لا^۲ - ۲ ل لا + ل^۲ + م^۲)

اسمین ا اور ب اور ب ... س و د و ی ... مستقل مین اب
ہم اپنے مفروض باتون کے صحیح اور درست ثابت کرنیکے واسطے اونکو ایسا تشخیص کرتے ہیں
کہ جیسے دوسرا رکن اوپر کی مساوات کا اول رکن کے ساتھہ تطبیق پائے اگر ہم کسور جزیہ کا
نسب نما یکسان کرین اور اونکو باہم جمع کرین تو نسب نما تو مو ہوگا اور شمار کنندہ جملہ (ن - ۱) ویں
درجہ کا لا کا ہوگا اب اگر اس شمار کنندہ مین لا کی قواء مختلفہ کے امثال کو اور لو مین لا کے قواء مختلف کے
امثال کو متساوی بموافق اپنی اپنی نظیر کے لکھین تو ن مساواتین درجہ اول کی حاصل ہونگین اور ان
ن مقادیر ا و ب و ب ... تشخیص ہونگین اور ا و ب و ب ...
کی ان قیمتون سے دوسرا رکن اوپر کی مساوات کا متطابق اول رکن کے ہو جائیگا
پس اسطرح لو/مو کی تجزی سلسلہ کسور جزیہ مین ہو جائیگی

اگر مو مین اور اجزاء ضربی مفردہ مثل لا - ط کے ملتف ہون تو ہر یک جز ضربی سے ایک کسر مثل
ا/(لا - ط) کے پیدا ہوگی اور کوئی جز ضربی مکررہ مثل (لا - ص)^ر کی سلسلہ کسور جزیہ کا اس
صورت کا پیدا کریگا کہ ب/(لا - ص)^ر و ب/(لا - ص)^(ر-۱) وغیرہما اور اسیطرح اور اجزاء ضربی مسلسل
صورت لا^۲ - ۲ سہ لا + سہ^۲ + صہ^۲ یا (لا^۲ - ۲ ل لا + ل^۲ + م^۲) سے ایک کسر پیدا ہوگی
یا ایک سلسلہ کسور پیدا ہوگا جنکی صورت اوپر ہم نے بتلادی ہے

(۱۷) دفعه ۱۶ مین جو اثبات لکھا ہی وه سب طرح سے قابل اطمینان نہین ہے کیونکہ یہہ نہین
ثابت کیا کہ ن مساواتین جو اول درجہ کی حاصل ہوتی ہین اور اون سے ا و ف ا و ف ۲ . . .
وغیرہ تشخیص ہوتے ہین وه آپسمین بالکل بے لگاؤ اور موافق ہین
ایک ترکیب نہایت مستحکم مسٹر سومرشام کوکس نے اپنی رسالہ علم الکلیات مین لکھی ہے جسکا
مختصر بیان ہم کرتی ہین فرض کرو کہ ح (لا) مین جز ضربی لا − ط مکرر ن دفعہ آتا ہو اگر

$$\text{ح}(\text{لا}) = (\text{لا} - \text{ط})^{\text{ن}}\ \text{ھج}(\text{لا})$$

تو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{مج}(\text{لا})}{\text{ح}(\text{لا})} = \frac{\text{مج}(\text{لا})}{(\text{لا}-\text{ط})^{\text{ن}}\ \text{ھج}(\text{لا})} = \frac{\text{مج}(\text{لا}) - \frac{\text{مج}(\text{ط})}{\text{ھج}(\text{ط})}\ \text{ھج}(\text{لا})}{(\text{لا}-\text{ط})^{\text{ن}}\ \text{ھج}(\text{لا})} + \frac{\frac{\text{مج}(\text{ط})}{\text{ھج}(\text{ط})}}{(\text{لا}-\text{ط})^{\text{ن}}}$$

اب $\text{مج}(\text{لا}) - \frac{\text{مج}(\text{ط})}{\text{ھج}(\text{ط})}\ \text{ھج}(\text{لا})$ معدوم ہوتا ہے جب کہ لا = ط اسواسطے لا − ط پر پورا تقسیم ہوتا ہے
فرض کرو کہ اس تقسیم مین خارج قسمت ھر (لا) نکلتا ہی تو

$$\frac{\text{مج}(\text{لا})}{\text{ح}(\text{لا})} = \frac{\text{ھر}(\text{لا})}{(\text{لا}-\text{ط})^{\text{ن}-1}\ \text{ھج}(\text{لا})} + \frac{\text{مج}(\text{ط})}{\text{ھج}(\text{ط})}\ \frac{1}{(\text{لا}-\text{ط})^{\text{ن}}}$$

اب وہی عمل مکرر $\frac{\text{ھر}(\text{لا})}{(\text{لا}-\text{ط})^{\text{ن}-1}\ \text{ھج}\ \text{لا}}$ پر کرو اور اسیطرح متواتر اعمال کے کرنے سے $\frac{\text{مج}(\text{لا})}{\text{ح}(\text{لا})}$
کی تجزی پوری ہو جائیگی اس اثبات مین ط کیا ایک حقیقی قیمت یا ایک خیالی قیمت مساوات
ح (لا) = ۰ کی ہو سکتی ہے اگر $\text{ط} = \text{سہ} + \text{صہ}\sqrt{(-1)}$ تو $\text{سہ} - \text{صہ}\sqrt{(-1)}$ بہی
ایک قیمت ح (لا) = ۰ کی ہوگی اب فرض کرو کہ اس قیمت کو ص تعبیر کرتا ہی اب اگر دونو
کسر جزئیہ کو جمع کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\text{مج}(\text{ط})}{\text{ھج}(\text{ط})}\ \frac{1}{(\text{لا}-\text{ط})^{\text{ن}}}\quad \text{اور}\quad \frac{\text{مج}(\text{ص})}{\text{ھج}(\text{ص})}\ \frac{1}{(\text{لا}-\text{ص})^{\text{ن}}}$$

اب ایک نتیجہ حاصل ہوگا جو $\sqrt{(-1)}$ سے خالی ہوگا
(۱۸) دفعہ ۱۴ کی امثلہ (۹) اور (۱۲) کی طرف ان تمام کسور جزئیہ کی نکالنے کے واسطے
رجوع کرین مگر ایک یہہ صورت ہو سکتی ہے کہ $\frac{\text{ل لا} + \text{م}}{(\text{لا}^2 - 2\text{ک لا} + \text{ک}^2 + \text{م}^2)^{\text{م}}}$ اسکا بیان متعلق ہوگا
جب اس بات کو ثابت کرسکے کہ کسر ناطق کی تجزیہ دفعہ ۱۴ کی طرح ہو سکتی ہم مختلف طرح کی

جزئیہ حکمتین کام مین لاتے ہین جیسے کہ تحت ا اور ب ا اور ب ۲ کی تشخیص کرینگے
چونکہ شمار کنندہ کسر مفروض کا اور وہ شمار کنندہ جو کسور جزئیہ کے جمع کرنے سے پیدا ہوتا ہے از روی
تطابق کے مساوی ہین یعنی دونو ایک ہین اسلئے یہہ نہایت بکار آمد خیال ہی کہ یہہ مساوات اونمین
قائم رہیگی اگر ہم مقدار متغیر لا کی کے واسطے کوئی قیمت تعین کرین

(۱۹) وہ کسر جزئیہ تشخیص کرو جو موافق ایک جز ضربی درجہ اول کی ہو

فرض کرو کہ $\frac{\text{مج}(\text{لا})}{\text{ح}(\text{لا})}$ کسر ہے جسکی تجزی منظور ہے اور ح (لا) مین جز ضربی لا − ط
ایک دفعہ آتا ہے فرضکرو

$$\frac{\text{مج}(\text{لا})}{\text{ح}(\text{لا})} = \frac{\text{ا}}{\text{لا}-\text{ط}} + \frac{\text{ھر}(\text{لا})}{\text{ھج}(\text{لا})} \quad \ldots\ldots (1)$$

اسمین ا ایک مقدار مستقل ہے اور $\frac{\text{ھر}(\text{لا})}{\text{ھج}(\text{لا})}$ تمام کسور جزئیہ کے مجموعہ کو باستثنا $\frac{\text{ا}}{\text{لا}-\text{ط}}$ کے
تعبیر کرتا ہے اور $\text{ح}(\text{لا}) = (\text{لا}-\text{ط})\,\text{ھج}(\text{لا})$

(۱) سے

$$\text{مج}(\text{لا}) = \text{ا}\,\text{ھج}(\text{لا}) + (\text{لا}-\text{ط})\,\text{ھر}(\text{لا}) \quad \ldots (2)$$

(۲) مین جو لا کے سب قیمتون پر جاری ہے لا = ط کے مقرر کرو تو

$$\text{مج}(\text{ط}) = \text{ا}\,\text{ھج}(\text{ط})$$

اسواسطے

$$\text{ا} = \frac{\text{مج}(\text{ط})}{\text{ھج}(\text{ط})}$$

چونکہ $\text{ح}'(\text{لا}) = \text{ھج}(\text{لا}) + (\text{لا}-\text{ط})\,\text{ھج}'(\text{لا})$ اسواسطے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہی

$$\text{ح}'(\text{ط}) = \text{ھج}(\text{ط})$$

اسواسطے

$$\text{ا} = \frac{\text{مج}(\text{ط})}{\text{ح}'(\text{ط})}$$

(۲۰) کسور جزئیہ موافق اول درجہ کے جز ضربی کے جو مکرر آئین تشخیص کرو

فرض کرو کہ ح (لا) مین ایک جز ضربی لا − ط مکرر ن دفعہ آتا ہی اور $\text{ح}(\text{لا}) = (\text{لا}-\text{ط})^{\text{ن}}\,\text{ھج}(\text{لا})$

$$\frac{\text{مج}\,\text{لا}}{\text{ح}\,\text{لا}} = \frac{\text{ا}}{(\text{لا}-\text{ط})^{\text{ن}}} + \frac{\text{ا}_2}{(\text{لا}-\text{ط})^{\text{ن}-1}} + \frac{\text{ا}_3}{(\text{لا}-\text{ط})^{\text{ن}-2}} + \ldots + \frac{\text{ا}_{\text{ن}}}{\text{لا}-\text{ط}} + \frac{\text{ھر}(\text{لا})}{\text{ھج}(\text{لا})}$$

اسمین $\frac{\text{ھر}(\text{لا})}{\text{ھج}(\text{لا})}$ سے وہ تمام کسور جزئیہ تعبیر ہوتی ہین جو اون اجزا ضربی ح (لا) سے پیدا ہوتے ہیں

طرفین مساوات کو $(لا-ط)^{ن}$ مین ضرب دو اور ح (لا) کو بجای $\frac{مج(لا)}{ح(لا)}$ $(لا-ط)^{ن}$ کے رکھو تو

$$ح(لا) = ا_1 + ا_2(لا-ط) + ا_3(لا-ط)^2 \ldots + ا_ن(لا-ط)^{ن-1} + \frac{هر(لا)}{هج(لا)}(لا-ط)^{ن}$$

اس مطابقہ کے طرفین کا متواتر سر جزوی لو اور بعد سر جزوی لینے کے لا = ط کے رکھو تو

$$ح(ط) = ا_1$$
$$ح'(ط) = ا_2$$
$$ح''(ط) = 1 \times 2\, ا_3$$
$$ح'''(ط) = \underline{|3}\, ا_4$$
$$\vdots$$
$$ح^{ن-1}(ط) = \underline{|ن-1}\, ا_ن$$

پس $ا_1$ و $ا_2$ ... $ا_ن$ تشخیص ہو گی

(۲۱) کسور جزئیہ موافق ایک زوج خیالی جذرون کے جو مکرر نہین واقع ہوتے دریافت کرو

فرض کرو کہ $\frac{مج(لا)}{ح(لا)}$ اوس کسر کو تعبیر کرتی ہی جسکی تجزی منظور ہے اور سہ ± صہ $\sqrt{(-1)}$ ایک زوج خیالی جذرون کا ہی اب اگر ان جذرون کو ط اور ص سے تعبیر کرین اور دفعہ ۱۹ کے موافق عمل کرین تو کسور جزئیہ کے واسطے یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{مج(ط)}{ح'(ط)} \cdot \frac{1}{لا-ط} \quad \text{اور} \quad \frac{مج(ص)}{ح'(ص)} \cdot \frac{1}{لا-ص}$$

فرض کرو کہ $\frac{مج(ط)}{ح'(ط)} = ا - ب\sqrt{(-1)}$ تو اس سبب سے کہ $\frac{مج(ص)}{ح'(ص)}$ حاصل $\frac{مج(ط)}{ح'(ط)}$ سے اسطرح ہو سکتا ہی کہ $\sqrt{(-1)}$ کی علامت بدل دین تو یہہ حاصل ہونا چاہئے کہ

$$\frac{مج(ص)}{ح'(ص)} = ا + ب\sqrt{(-1)}$$ اسے معلوم ہوا کہ کسور

$$\frac{ا-ب\sqrt{(-1)}}{لا-سہ-صہ\sqrt{(-1)}} \quad \text{اور} \quad \frac{ا+ب\sqrt{(-1)}}{لا-سہ+صہ\sqrt{(-1)}} \quad \text{ہین}$$

اور اونکا مجموعہ

$$\frac{2ا(لا-سہ)+2ب\,صہ}{(لا-سہ)^2+صہ^2} \quad \text{ہے}$$

(۲۲) یا ہم اسطرح عمل کر سکتے ہین کہ لا^2 - ع لا + ق کو درجہ دوم کا ایسا جز ضربی فرض کرین کہ اون سے زوج خیالی جذرون سہ ± صہ $\sqrt{(-1)}$ کا پیدا ہو تو فرض کرو کہ

کسور

اب کوئی قیمت لا کی ایسی مقرر کرو کہ $لا^2 - ع لا + ق$ کو معدوم کرے پس مساوات کی یہہ صورت ہو گی کہ

$$مج (لا) = (ل_ر لا + م_ر) مجَ (لا)$$

دفعہ ۳۲ کی طرح عمل کر کے ل اور م کو دریافت کرو تو عمل انتقال سے (۱) کی یہہ صورت ہوگی

$$مج (لا) - (ل_ر لا + م_ر) مجَ (لا) = (ل_{ر-1} لا + م_{ر-1}) (لا^2 - ع لا + ق) مجَ (لا) ...$$

بائیں طرف کے رکن میں ہر رقم کے اندر جز ضربی $لا^2 - ع لا + ق$ ہے جیسا کہ معلوم ہو اور دونوں طرف کے ارکان منطابق ہیں اسلئے اس جز ضربی پر تقسیم کر سکتے ہیں فرض کرو کہ دائیں طرف جو نتیجہ حاصل ہو وہ مج، (لا) سے تعبیر ہوتا ہے تو

$$مج_1 (لا) = (ل_{ر-1} لا + م_{ر-1}) مجَ (لا) + (ل_{ر-2} لا + م_{ر-2}) (لا^2 - ع لا + ق) مجَ (لا)$$

$$+ \ldots + (لا^2 - ع لا + ق)^{ر-1} هر (لا) \ldots (۲)$$

(۲) سے ہم $ل_{ر-1}$ اور $م_{ر-1}$ کو موافق سابق کے دریافت کرتے ہیں تو عمل انتقال اور تقسیم سے

$$مج_2 (لا) = (ل_{ر-2} لا + م_{ر-2}) مجَ لا + (ل_{ر-3} لا + م_{ر-3}) (لا^2 - ع لا + ق) مجَ لا$$

اور علیٰ ہذا القیاس جب تک تمام مقادیر تشخیص ہوں

مثال $\frac{لا^2 - ۳ لا - ۲}{(لا^2 + لا + ۱)^2 (لا + ۱)^2}$ اسکو برابر

$$\frac{ل_2 لا + م_2}{(لا^2 + لا + ۱)^2} + \frac{ل_1 لا + م_1}{لا^2 + لا + ۱} + \frac{هر (لا)}{(لا + ۱)^2}$$

تو $لا^2 - ۳ لا - ۲ = (ل_2 لا + م_2) (لا + ۱)^2$

$$+ (ل_1 لا + م_1) (لا^2 + لا + ۱) (لا + ۱)^2 + (لا^2 + لا + ۱)^2 هر (لا) \ldots (۳)$$

فرض کرو کہ $لا^2 + لا + ۱ = ۰$ پس مساوات کی یہہ صورت ہو جائیگی کہ

$$لا^2 - ۳ لا - ۲ = (ل_2 لا + م_2) (لا + ۱)^2$$

$$= (ل_2 لا + م_2) (لا^2 + ۲ لا + ۱)$$

$- لا - ۱$ کو بجائی $لا^2$ کے رکھو تو

$$- ۴ لا - ۳ = (ل_2 لا + م_2) لا = ل_2 لا^2 + م_2 لا$$

$$= -\text{ل}_{۲}(\text{لا}+۱)+\text{م}_{۲}\,\text{لا}$$

اسواسطے $-۴ = -\text{ل}_{۲}+\text{م}_{۲}$ اور $-۳ = -\text{ل}_{۲}$

پس $\text{ل}_{۲} = ۳$ اور $\text{م}_{۲} = -۱$

(۳) اس عمل انتقال سے

$$\text{لا}^{۲}-۳\,\text{لا}-۲-(۳\,\text{لا}-۱)(\text{لا}+۱)^{۲}$$

$$= (\text{ل}_{۱}\text{لا}+\text{م}_{۱})(\text{لا}^{۲}+\text{لا}+۱)(\text{لا}+۱)^{۲}+(\text{لا}^{۲}+\text{لا}+۱)^{۲}\,\text{ھر}(\text{لا})$$

دائیں طرف کا رکن $-۳\,\text{لا}^{۳}-۴\,\text{لا}^{۲}-۴\,\text{لا}-۱$ ہے $\text{لا}^{۲}+\text{لا}+۱$ پر تقسیم کرو

تو $-(۳\,\text{لا}+۱) = (\text{ل}_{۱}\text{لا}+\text{م}_{۱})(\text{لا}+۱)^{۲}+(\text{لا}^{۲}+\text{لا}+۱)\,\text{ھر}\,\text{لا} \cdots (۴)$

پھر فرض کرو کہ $\text{لا}^{۲}+\text{لا}+۱ = ۰$ تو

$$-۳\,\text{لا}-۱ = (\text{ل}_{۱}\text{لا}+\text{م}_{۱})(\text{لا}^{۲}+۲\,\text{لا}+۱) = (\text{ل}_{۱}\text{لا}+\text{م}_{۱})\,\text{لا}$$

$$= -\text{ل}_{۱}(\text{لا}+۱)+\text{م}_{۱}\,\text{لا}$$

اسواسطے $-۳ = -\text{ل}_{۱}+\text{م}_{۱}$ اور $-۱ = -\text{ل}_{۱}$

پس $\text{ل}_{۱} = ۱$ اور $\text{م}_{۱} = -۲$

پس کسور جزئیہ موافق جزو ضربی درجہ دوم کے دریافت ہونگیں اور کسور جزئیہ موافق جزو ضربی $(\text{لا}+۱)^{۲}$ کے موافق دفعہ ۱۲۰ کے دریافت ہو سکتی ہیں اور (۴) سے انتقال اور $\text{لا}^{۲}+\text{لا}+۱$ پر تقسیم کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

$$\text{ھر}(\text{لا}) = -(\text{لا}-۱)$$

پس $\dfrac{\text{ھر}(\text{لا})}{(\text{لا}+۱)^{۲}} = -\dfrac{\text{لا}-۱}{(\text{لا}+۱)^{۲}} = -\dfrac{\text{لا}+۱}{(\text{لا}+۱)^{۲}}+\dfrac{۲}{(\text{لا}+۱)^{۲}} = -\dfrac{۱}{\text{لا}+۱}+\dfrac{۲}{(\text{لا}+۱)^{۲}}$

اسواسطے

$$\frac{\text{لا}^{۲}-۳\,\text{لا}-۲}{(\text{لا}^{۲}+\text{لا}+۱)^{۲}(\text{لا}+۱)^{۲}} = \frac{۳\,\text{لا}-۱}{(\text{لا}^{۲}+\text{لا}+۱)^{۲}}+\frac{\text{لا}-۲}{\text{لا}^{۲}+\text{لا}+۱}+\frac{۲}{(\text{لا}+۱)^{۲}}-\frac{۱}{\text{لا}+۱}$$

(۳۴) امثلہ کلی $\dfrac{۵\,\text{لا}^{۳}+۱}{\text{لا}^{۲}-۳\,\text{لا}+۲}$ دریافت کرو

تقسیم سے تمکو یہہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{۵ لا}^2+\text{۱}}{\text{لا}^2-\text{۳ لا}+\text{۲}}=\text{۵ لا}+\text{۱۵}+\frac{\text{۳۵ لا}-\text{۲۹}}{\text{لا}^2-\text{۳ لا}+\text{۲}}$$

فرض کرو کہ

$$\frac{\text{۳۵ لا}-\text{۲۹}}{\text{لا}^2-\text{۳ لا}+\text{۲}}=\frac{\text{ا}}{\text{لا}-\text{۱}}+\frac{\text{ب}}{\text{لا}-\text{۲}}$$

اسواسطے

$$\text{۳۵ لا}-\text{۲۹}=\text{ا}\,(\text{لا}-\text{۲})+\text{ب}\,(\text{لا}-\text{۱})$$

لا کو متواتر برابر ۱ اور ۲ کے مقرر کرو تو

$$\text{۳۵}-\text{۲۹}=-\text{ا}\quad\text{یا}\quad\text{ا}=-\text{۶}$$

$$\text{۷۰}-\text{۲۹}=\text{ب}\quad\text{یا}\quad\text{ب}=\text{۴۱}$$

اسواسطے

$$\frac{\text{۵ لا}^2+\text{۱}}{\text{لا}^2-\text{۳ لا}+\text{۲}}=\text{۵ لا}+\text{۱۵}-\frac{\text{۶}}{\text{لا}-\text{۱}}+\frac{\text{۴۱}}{\text{لا}-\text{۲}}$$

اسواسطے

$$\text{مع}\;\frac{\text{۵ لا}^2+\text{۲}}{\text{لا}^2-\text{۳ لا}+\text{۲}}\,\text{ز لا}=\frac{\text{۵ لا}^2}{\text{۲}}+\text{۱۵ لا}-\text{۶ لوک}\,(\text{لا}-\text{۱})+\text{۴۱ لوک}\,(\text{لا}-\text{۲})$$

کلی $\frac{\text{۹ لا}^2+\text{۹ لا}-\text{۱۲۸}}{\text{لا}^3-\text{۵ لا}^2+\text{۳ لا}+\text{۹}}$ دریافت کرو

چونکہ $\text{لا}^3-\text{۵ لا}^2+\text{۳ لا}+\text{۹}=(\text{لا}-\text{۳})^2\,(\text{لا}+\text{۱})$ تو ہم یہہ فرض کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{\text{۹ لا}^2+\text{۹ لا}-\text{۱۲۸}}{\text{لا}^3-\text{۵ لا}^2+\text{۳ لا}+\text{۹}}=\frac{\text{ا}}{\text{لا}+\text{۱}}+\frac{\text{ب}_1}{(\text{لا}-\text{۳})^2}+\frac{\text{ب}_2}{\text{لا}-\text{۳}}$$

اسواسطے

$$\text{۹ لا}^2+\text{۹ لا}-\text{۱۲۸}=\text{ا}\,(\text{لا}-\text{۳})^2+\text{ب}_1(\text{لا}+\text{۱})+\text{ب}_2(\text{لا}+\text{۱})(\text{لا}-\text{۳})$$

لا = ۳ اور −۱ متواتر فرض کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ب}_1=-\text{۵}\quad\text{اور}\quad\text{ا}=-\text{۸}$$

اور نیز لا² کے امثال کو مساوی لکھنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

$$\text{۹}=\text{ا}+\text{ب}_2$$

اسواسطے $\text{ب}_2=\text{۱۷}$

اسواسطے

$$\text{مع}\;\frac{\text{۹ لا}^2+\text{۹ لا}-\text{۱۲۸}}{\text{لا}^3-\text{۵ لا}^2+\text{۳ لا}+\text{۹}}\,\text{ز لا}=-\text{۸ لوک}\,(\text{لا}+\text{۱})+\frac{\text{۵}}{\text{لا}-\text{۳}}+\text{۱۷ لوک}\,(\text{لا}-\text{۳})$$

کلی $\frac{\text{لا}^2+\text{۱}}{(\text{لا}-\text{۱})^4\,(\text{لا}^3+\text{۱})}$ دریافت کرو

فرض کرو کہ

$$\frac{\text{لا}^2+\text{۱}}{(\text{لا}-\text{۱})^4\,(\text{لا}^3+\text{۱})}=\frac{\text{ا}_1}{(\text{لا}-\text{۱})^4}+\frac{\text{ا}_2}{(\text{لا}-\text{۱})^3}+\frac{\text{ا}_3}{(\text{لا}-\text{۱})^2}+\frac{\text{ا}_4}{\text{لا}-\text{۱}}+\frac{\text{ب}}{\text{لا}+\text{۱}}+\frac{\text{س لا}+\text{د}}{\text{لا}^2-\text{لا}+\text{۱}}$$

اسواسطے لا^۳ + ۱ = [ا۱ + ا۲ (لا − ۱) + ا۳ (لا − ۱)^۲ + ا۴ (لا − ۱)^۳] (لا^۲ + ۱)

+ [ب (لا^۲ − لا + ۱) + (س لا + د) (لا + ۱)] (لا − ۱)^۴ ... (۱)

لا = ۱ کے رکھو تو ۲ = ۲ ا۱ ... (۲)

اسواسطے ا۱ = ۱

(۱) اور (۲) سے تفریق کرنے مین یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

لا^۳ − ۱ = ا۱ (لا^۳ − ۱) + [ا۲ + ا۳ (لا − ۱) + ا۴ (لا − ۱)^۲] (لا − ۱) (لا + ۱)

+ [ب (لا^۲ − لا + ۱) + (س لا + د) (لا + ۱)] (لا − ۱)

لا − ۱ پر تقسیم کرو تو

لا + ۱ = ا۱ (لا^۲ + لا + ۱) + [ا۲ + ا۳ (لا − ۱) + ا۴ (لا − ۱)^۲] (لا^۲ + ۱)

+ [ب (لا^۲ − لا + ۱) + (س لا + د) (لا + ۱)] (لا − ۱)^۳ ... (۳)

لا = ۱ کے رکھو تو ۲ = ۳ ا۱ + ۲ ا۲ ... (۴)

اسواسطے ا۲ = − ۱/۲

(۳) اور (۴) سے تفریق کرنے مین یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

لا − ۱ = ا۱ (لا^۲ + لا − ۲) + ا۲ (لا^۲ − ۱) + [ا۳ + ا۴ (لا − ۱)] (لا − ۱) (لا^۲ + ۱)

لا − ۱ پر تقسیم کرو تو + [ب (لا^۲ − لا + ۱) + (س لا + د) (لا + ۱)] (لا − ۱)^۳

۱ = ا۱ (لا + ۲) + ا۲ (لا^۲ + لا + ۱) + [ا۳ + ا۴ (لا − ۱)] (لا^۲ + ۱)

+ [ب (لا^۲ − لا + ۱) + (س لا + د) (لا + ۱)] (لا − ۱)^۲

لا = ۱ کے رکھو تو ۱ = ۳ ا۱ + ۳ ا۲ + ۲ ا۳ ... (۶)

اسواسطے ا۳ = − ۱/۴

(۵) اور (۶) سے تفریق کرنے مین یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

۰ = ا۱ (لا − ۱) + ا۲ (لا^۲ + لا − ۲) + ا۳ (لا^۲ − ۱) + ا۴ (لا − ۱) (لا^۲ + ۱)

+ [ب (لا^۲ − لا + ۱) + (س لا + د) (لا + ۱)] (لا − ۱)^۲

لا – ا پر تقسیم کرو تو

۰ = ا۱ + ا۲ (لا + ۲) + ا۳ (لا۲ + لا + ۱) + ا۴ (لا۳ + ۱)

+ [ب (لا۲ – لا + ۱) + (س لا + د) (لا + ۱)] (لا – ۱) ... (۷)

لا = ا کے رکھو تو ۰ = ا۱ + ۳ ا۲ + ۳ ا۳ + ۲ ا۴ ...... (۸)

اسواسطے ا۴ = ۵/۸

(۷) اور (۸) سے تفریق کرنے مین

۰ = ا۲ (لا – ۱) + ا۳ (لا۲ + لا – ۲) + ا۴ (لا۳ – ۱)

+ [ب (لا۲ – لا + ۱) + (س لا + د) (لا + ۱)] (لا – ۱)

لا – ۱ پر تقسیم کرو تو

۰ = ا۲ + ا۳ (لا + ۲) + ا۴ (لا۲ + لا + ۱)

+ ب (لا۲ – لا + ۱) + (س لا + د) (لا + ۱) ... (۹)

لا = – ۱ کے رکھو تو

۰ = ا۲ + ا۳ + ا۴ + ۳ ب .... (۱۰)

اسواسطے ب = ۱/۲۴

(۹) اور (۱۰) سے تفریق کرنے مین

۰ = ا۳ (لا + ۱) + ا۴ (لا۲ + لا) + ب (لا۲ – لا – ۲) + (س لا + د) (لا + ۱)

لا + ۱ پر تقسیم کرو تو

۰ = ا۳ + ا۴ لا + ب (لا – ۲) + س لا + د ...... (۱۱)

لا = ۰ کے رکھو تو

ا۳ – ۲ ب + د = ۰ (۱۲)

اسواسطے د = ۱/۳

(۱۱) اور (۱۲) سے تفریق کرنے مین

ا۴ + ب + س = ۰

اسواسطے $\text{س} = -\frac{۵}{۴}$

اسواسطے $\frac{\text{لا}^{۲}+۱}{(\text{لا}-۱)^{۴}(\text{لا}^{۳}+۱)} = \frac{۱}{(\text{لا}-۱)^{۴}} - \frac{۱}{۲(\text{لا}-۱)^{۳}} \quad \frac{۱}{۴(\text{لا}-۱)^{۲}}$

$+ \frac{۵}{۸(\text{لا}-۱)} + \frac{۱}{۲۴(\text{لا}+۱)} - \frac{۲\text{لا}-۱}{۳(\text{لا}^{۲}-\text{لا}+۱)}$

اسواسطے $\int \frac{(\text{لا}^{۲}+۱)\,\text{ز لا}}{(\text{لا}-۱)^{۴}(\text{لا}^{۳}+۱)} = -\frac{۱}{۳(\text{لا}-۱)^{۳}} + \frac{۱}{۴(\text{لا}-۱)^{۲}} + \frac{۱}{۴(\text{لا}-۱)}$

$+ \frac{۵}{۸}\,\text{لوگ}(\text{لا}-۱) + \frac{۱}{۲۴}\,\text{لوگ}(\text{لا}+۱) - \frac{۱}{۲}\,\text{لوگ}(\text{لا}^{۲}-\text{لا}+۱)$

(۲۵) اب اور زیادہ مثالین لکھتے ہین اور اونمین $\frac{\text{لا}^{\text{م}-۱}}{\text{لا}^{\text{ن}} \pm ۱}$ کے کلی کو بیان کرتے ہین م اور ن دونو کو مثبت صحاح فرض کیا ہے اور م − ا چھوٹا ن سے ہے

$\frac{\text{لا}^{\text{م}-۱}}{\text{لا}^{\text{ن}}-۱}$ کی کل دریافت کرنی مطلوب ہے اور ن جفت ہے

حقیقی جذرین $\text{لا}^{\text{ن}}-۱ = ۰$ کی ا اور − لا مین اور خیالی جذرین اس صورت بیانیہ جم لو بر $\pm \sqrt{(-۱)}$ جب لو بر سے دریافت ہوتی ہین جنمین $\text{بر} = \frac{\text{۲ط}}{\text{ن}}$ اور لو کی قیمتیں متواتر ۲ اور ۳ ... ن − ۲ تک ہین بائیسوان باب علم مثلث مستوی کا دیکھو

اگر $\frac{\text{مج}(\text{لا})}{\text{ح}\ \text{لا}}$ ایک کسر ہو جسکی تجزی کرنے ہو تو موافق دفعہ ۱۹ کے کسور جزئیہ موافق جذر ط کے $\frac{\text{مج}(\text{ط})}{\text{ح}'(\text{ط})} \cdot \frac{۱}{\text{لا}-\text{ط}}$ ہے صورت حال مین

$\frac{\text{مج}(\text{ط})}{\text{ح}'(\text{ط})} = \frac{\text{ط}^{\text{م}-۱}}{\text{ن}\,\text{ط}^{\text{ن}-۱}} = \frac{\text{ط}^{\text{م}}}{\text{ن}\,\text{ط}^{\text{ن}}} = \frac{\text{ط}^{\text{م}}}{\text{ن}}$ کیونکہ $\text{ط}^{\text{ن}} = ۱$

اسسے معلوم ہوا کہ جذر ۱ کے موافق ہمکو کسر جزئیہ $\frac{۱}{\text{ن}(\text{لا}-۱)}$ حاصل ہوتی ہے اور جذر − ا کی موافق ہمکو کسر جزئیہ $\frac{(-۱)^{\text{م}}}{\text{ن}(\text{لا}+۱)}$ حاصل ہوتی ہے اور مطابق زوج جذرون

جم لو بر $\pm \sqrt{(-۱)}$ جب لو بر کے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\left[\text{جم لو بر} + \sqrt{(-۱)}\ \text{جب لو بر}\right]^{\text{م}}}{\text{ن}\left[\text{لا} - \text{جم لو بر} - \sqrt{(-۱)}\ \text{جب لو بر}\right]} + \frac{\left[\text{جم لو بر} - \sqrt{(-۱)}\ \text{جب لو بر}\right]^{\text{م}}}{\text{ن}\left[\text{لا} - \text{جم لو بر} + \sqrt{(-۱)}\ \text{جب لو بر}\right]}$$

یعنی

$$\frac{\text{جم م لو بر} + \sqrt{(-۱)}\ \text{جب م لو بر}}{\text{ن}\left[\text{لا} - \text{جم لو بر} - \sqrt{(-۱)}\ \text{جب لو بر}\right]} + \frac{\text{جم م لو بر} - \sqrt{(-۱)}\ \text{جب م لو بر}}{\text{ن}\left[\text{لا} - \text{جم لو بر} + \sqrt{(-۱)}\ \text{جب لو بر}\right]}$$

یعنی $\dfrac{2\ \text{جم م نق بر (لا} - \text{جم نق بر)} - 2\ \text{جب م نق بر جب نق بر}}{\text{ن (لا}^2 - 2\ \text{لا جم نق بر} + 1)}$

پس $\dfrac{\text{لا}^{\text{م}+1}}{\text{لا}^{\text{ن}} - 1} = \dfrac{1}{\text{ن (لا} - 1)} + \dfrac{(-1)^{\text{م}}}{\text{ن (لا} + 1)}$

$+ \dfrac{2}{\text{ن}}\ \text{مج}\ \dfrac{\text{جم م نق بر (لا} - \text{جم نق بر)} - \text{جب م نق بر جب نق بر}}{(\text{لا} - \text{جم نق بر})^2 + \text{جب}^2\ \text{نق بر}}$

اسمین مج اوس مجموعہ سے تعبیر ہوتا ہے جو نق کی تمام جفت قیمتین ۲ سے ن ـ ۲ تک مقرر کرنے سے ملتا ہے۔ اسسے معلوم ہوا کہ

$\text{مع}\ \dfrac{\text{لا}^{\text{م}-1}}{\text{لا}^{\text{ن}} - 1} = \dfrac{1}{\text{ن}}\ \text{لوک (لا} - 1) + \dfrac{(-1)^{\text{م}}}{\text{ن}}\ \text{لوک (لا} + 1)$

$+ \dfrac{1}{\text{ن}}\ \text{مج جم م نق بر لوک (لا}^2 - 2\ \text{لا جم نق بر} + 1) - \dfrac{2}{\text{ن}}\ \text{مج جب م نق بر ظل}^{-1}\ \dfrac{\text{لا} - \text{جم نق بر}}{\text{جب نق بر}}$

(۲۶) $\dfrac{\text{لا}^{\text{م}-1}}{\text{لا}^{\text{ن}} - 1}$ کی کمی دریافت کرو ن طاق فرض کیا گیا ہی

حقیقی جذرین $\text{لا}^{\text{ن}} - 1 = 0$ کے ۱ ہے اور خیالی جذرین صورت بیانیہ

$\text{جم نق بر} \pm \sqrt{(-1)}\ \text{جب نق بر}$ سے دریافت ہوتی ہین اسمین $\text{بر} = \dfrac{\pi}{\text{ن}}$

اور نق کی متواتر قیمتین ۲ و ۴ . . ن ـ ۱ تک مقرر ہوتی ہین اسسے معلوم ہوا کہ موافق سابق کے ہم کو یہہ دریافت ہوگا کہ

$\text{مع}\ \dfrac{\text{لا}^{\text{م}-1}\ \text{ز لا}}{\text{لا}^{\text{ن}} - 1} = \dfrac{1}{\text{ن}}\ \text{لوک (لا} - 1) + \dfrac{1}{\text{ن}}\ \text{مج جم م نق بر لوک (لا}^2 - 2\ \text{لا جم نق بر} + 1)$

$- \dfrac{2}{\text{ن}}\ \text{مج جب م نق بر ظل}^{-1}\ \dfrac{\text{لا} - \text{جم نق بر}}{\text{جب نق بر}}$

(۲۷) کلی $\dfrac{\text{لا}^{\text{م}+1}}{\text{لا}^{\text{ن}} - 1}$ کی دریافت کرو ن جفت فرض کیا گیا ہے

مساوات $\text{لا}^{\text{ن}} + 1 = 0$ کی کوئی جذر حقیقی نہین اور خیالی جذرین اس صورت بیانیہ

$\text{جم نق بر} \pm \sqrt{(-1)}\ \text{جب نق بر}$ سے دریافت ہوتی ہین اسمین $\text{بر} = \dfrac{\pi}{\text{ن}}$ اور نق کی متواتر قیمتیں ۱ و ۳ . . . ن ـ ۱ تک مقرر کیجاتی ہین۔ اور اگر ط جذر $\text{لا}^{\text{ن}} + 1 = 0$ کے ہو تو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$\dfrac{\text{مح (ط)}}{\text{مح}'\ \text{(ط)}} = \dfrac{\text{ط}^{\text{م}}}{\text{ن ط}^{\text{ن}-1}} = \dfrac{\text{ط}^{\text{م}}}{\text{ن ط}^{\text{ن}}} = - \dfrac{\text{ط}^{\text{م}}}{\text{ن}}$

پس مجموعہ دو کسروں کا جو موافق زوج خیالی جذروں کے لیا جاوے یہ ہے کہ

$- \dfrac{2}{\text{ن}}\ \dfrac{\text{جم م نق بر (لا} - \text{جم نق بر)} - \text{جب م نق بر جب نق بر}}{(\text{لا} - \text{جم نق بر})^2 + \text{جب}^2\ \text{نق بر}}$

دوم ا۱، ا۲ ... کی قیمتون پر دفعہ ۲۰ مین خیال کرنے سے ہمکو یہہ دکھائی دیتا ہے کہ نتیجہ ذیل مستحکم ہے۔ فرض کرو کہ ا سے ن تک جتنی صحاح ہین اونمین سے ہر یک کی جگہہ ر قائم ہے تو اسکی صورت مفصلہ ح (ا + ھ) کی صورت مفصلہ قواء ھ مین جو ہوگی اوسکے اندر ار برابر ہوگا $ھ^{ر-1}$ کے امثال کے پس موافق اسکے ہمکو ار معمولی اعمال جبریہ سے معلوم ہوگا

مثلاً فرض کرو کہ $\frac{1}{(لا - ط)^{ن} (لا - ص)^{ع}}$ کی تجزی کسور جزئیہ مین کرنی ہے کسور جزئیہ کو

$$\frac{ا_1}{(لا - ط)^{ن}} + \frac{ا_2}{(لا - ط)^{ن-1}} + \cdots + \frac{ا_ن}{لا - ط}$$
$$+ \frac{ب_1}{(لا - ص)^{ع}} + \frac{ب_2}{(لا - ص)^{ع-1}} + \cdots + \frac{ب_ع}{لا - ص}$$

سے تعبیر کرو یہان ح (لا) = $(لا - ص)^{-ع}$ اسواسطے $(ط - ص + ھ)^{-ع}$ کی صورت مفصلہ جو قواء ھ مین ہوگی اوسکی اندر $ھ^{ر-1}$ کے امثال برابر ہونگی ار کے

اور ضابطہ جملہ ثنائی کے موافق صورت مفصلہ حاصل ہوگی اور اسیطرح سے ہمکو یہہ حاصل ہوگا

$$ا_ر = \frac{ع (ع + 1) \cdots (ع + ر - 2)}{\lfloor ر - 1} \cdot \frac{(-1)^{ر-1}}{(ط - ص)^{ع + ر - 1}}$$

اور اسیطرح اگر ا سے ع تک جو صحاح ہین اونمین سے کسی ایک کی جگہہ و قائم ہو تو $(ص - ط + ھ)^{-ن}$ کی صورت مفصلہ جو قواء ھ مین ہوگی اوسمین $ھ^{و-1}$ کے امثال برابر ب و کے ہوگی

سوم فرض کرو کہ

$$مح (لا) = \left(1 - \frac{ھ_1 لا^2}{ک^2}\right) \left(1 - \frac{ھ_2 لا^2}{2^2 ک^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{ھ_ن لا^2}{ن^2 ک^2}\right)$$

$$اور ح (لا) = \left(1 - \frac{ک_1 لا^2}{ک^2}\right) \left(1 - \frac{ک_2 لا^2}{2^2 ک^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{ک_ن لا^2}{ن^2 ک^2}\right)$$

یہان مح (لا) اور ح (لا) ایک ہی درجہ کے ہین $\frac{مح (لا)}{ح (لا)}$ کی تجزی سے رقم $\frac{ھ_ن}{ک_ن}$ مع ایک سلسلہ کسور جزئیہ کے حاصل ہوگی جسمین سے ایک زوج کو

$$\frac{ا_ر}{لا - ق} + \frac{ب_ر}{لا + ق}$$

سے تعبیر کرو اسمین ق بجاے $\frac{ر ک}{و}$ کے ہے

توموجب دفعہ ۱۹ کے

$$ا_ر = \frac{مج(ق)}{مَ(ق)} \quad ب_ر = \frac{مج(-ق)}{مَ(-ق)}$$

فرض کرو کہ ھہ ھہ پاک سے ہو اور فرض کرو کہ ن غیر محدود زیادہ ہوتا ہے تو رقم ... ن ... ن ... ہوگی

علم شلث ستوی کے باب ۲۳ کے موافق

$$مج(لا) = \frac{جب\ ھہ\ لا}{ھہ\ لا}\ ،\ ح(لا) = \frac{جب\ ک\ لا}{ک\ لا}$$

اسواسطے نم ق = $\frac{جب\ ھہ\ ق}{ھہ\ ق}$ اور چونکہ جب کہ ق = ۰ تو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$مَ(ق) = \frac{جم\ ک\ ق}{ق}$$

$$پس\ \frac{ا_ر}{لا - ق} + \frac{ب_ر}{لا + ق} = \frac{جب\ ھہ\ ق}{ھہ\ جم\ ک\ ق}\left(\frac{۱}{لا - ق} - \frac{۱}{لا + ق}\right)$$

$$= \frac{۲\ لو\ کہ\ جب\ \frac{ھہ\ لو\ کہ}{ک}}{ھہ\ ک\ جم\ لو\ کہ\ (لا^۲ - \frac{لو^۲ کہ^۲}{ک^۲})}$$

اسے معلوم ہوا کہ اخرکار اگر ھہ ھہ پاک سے ہو تو

$$\frac{جب\ ھہ\ لا}{جب\ ک\ لا} = \frac{۲ کہ}{ک} مج \frac{لو\ جب\ \frac{ھہ\ لو\ کہ}{ک}}{جم\ لو\ کہ\ (ک^۲ لا^۲ - لو^۲ کہ^۲)}$$

اسمین مج اوس مجموعہ کو تبلاتا ہے جو بلحاظ لو کے لو = ۱ سے لو = ھن تک لیا جاے

اس مثال کی ترکیب اور اسی قبیل کی مثالون مین استعمال مین آسکتی ہے

چہارم اگر اور زیادہ اس مضمون کی کیفیت دریافت کرنیکو دل چاہے تو سرٹ کا جبر مقابلہ اور کیمبرج اور ڈبلن کے کاغذات ریاضی کی تیسری جلد کو دیکہو

امثلہ

$$(۱)\ مع \frac{ز\ لا}{لا^۳ - ۱} = \frac{۱}{۶} لوک \frac{(لا - ۱)^۲}{لا^۲ + لا + ۱} - \frac{۱}{\sqrt{۳}} مس^{-۱} \frac{۲ لا + ۱}{\sqrt{۳}}$$

$$(۲)\ مع \frac{لا^۲ - ۱}{لا^۲ - ۴} ز لا = لا + لوک \left(\frac{لا - ۲}{لا + ۲}\right)^{\frac{۳}{۴}}$$

$$(۳)\ مع \frac{لا^۳ ز لا}{لا^۲ + ۷ لا + ۱۲} = \frac{لا^۲}{۲} - ۷ لا + ۶۴ لوک (لا + ۴) - ۲۷ لوک (لا + ۳)$$

$$(۴)\ مع \frac{ز لا}{لا^۴ - ط^۴} = \frac{۱}{۲ ط^۳} مس^{-۱} \frac{لا}{ط} + \frac{۱}{۴ ط^۳} ...$$

(۵) مع $\frac{\text{۲لا}^{۲} - \text{۳ط}^{۲}}{\text{لا}^{۴} - \text{ط}^{۴}}$ زلا = $\frac{۵}{\text{۲ط}}$ مس$^{-۱}$ $\frac{\text{لا}}{\text{ط}}$ − $\frac{۱}{\text{۴ط}}$ لوک $\frac{\text{لا} - \text{ط}}{\text{لا} + \text{ط}}$

(۶) مع $\frac{\text{زلا}}{(\text{۱} + \text{لا} + \text{لا}^{۲})(\text{۱} + \text{لا}^{۲})}$ = $\frac{۱}{۲}$ لوگ $\frac{\text{لا}^{۲} + \text{لا} + ۱}{\text{لا}^{۲} + ۱}$ + $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ مس$^{-۱}$ $\frac{\text{۲لا} + ۱}{\sqrt{۳}}$

(۷) مع $\frac{\text{لا}^{۲}\ \text{زلا}}{\text{لا}^{۴} + \text{لا}^{۲} - ۲}$ = $\frac{۱}{۶}$ لوک $\frac{\text{لا} - ۱}{\text{لا} + ۱}$ + $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ مس$^{-۱}$ $\frac{\text{لا}}{\sqrt{۲}}$

(۸) مع $\frac{۱ - \text{لا}^{۲}}{\text{لا}^{۴} + \text{لا}^{۲} + ۱}$ زلا = $\frac{۱}{۲}$ لوک $\frac{\text{لا}^{۲} - \text{لا} + ۱}{\text{لا}^{۲} + \text{لا} + ۱}$

(۹) مع $\frac{\text{لا}^{۲} - \text{۳لا} + ۳}{(\text{لا} - ۱)(\text{لا} - ۲)}$ زلا = لا + لوک $\frac{\text{لا} - ۲}{\text{لا} - ۱}$

(۱۰) مع $\frac{(\text{۳لا} - ۱)\ \text{زلا}}{\text{لا}^{۳} - \text{لا}^{۲} - \text{۲لا}}$ = $\frac{۱}{۲}$ لوک لا + لوک (لا − ۲) − $\frac{۴}{۳}$ لوک (لا + ۱)

(۱۱) مع $\frac{\text{زلا}}{(\text{لا} + \text{ص})(\text{لا}^{۲} + \text{ط}^{۲})}$ = $\frac{۱}{\text{ص}^{۲} + \text{ط}^{۲}}$ $\left[\text{لوک} \frac{\text{لا} + \text{ص}}{\sqrt{\text{لا}^{۲} + \text{ط}^{۲}}} + \frac{\text{ص}}{\text{ط}} \text{مس}^{-۱} \frac{\text{لا}}{\text{ط}}\right]$

(۱۲) مع $\frac{\text{زلا}}{\text{لا}(۱ + \text{لا} + \text{لا}^{۲} + \text{لا}^{۳})}$ = لوک لا − $\frac{۱}{۲}$ لوک (۱ + لا) − $\frac{۱}{۴}$ لوک (۱ + لا^{۲}) − $\frac{۱}{۲}$ مس$^{-۱}$ لا

(۱۳) مع $\frac{\text{زلا}}{(\text{لا} - ۱)^{۲}(\text{لا}^{۲} + ۱)^{۲}}$ = − $\frac{۱}{\text{۴}(\text{لا} - ۱)}$ − $\frac{۱}{۲}$ لوک (لا − ۱) + $\frac{۱}{۴}$ مس$^{-۱}$ لا − $\frac{۱}{\text{۴}(\text{لا}^{۲} + ۱)}$ + $\frac{۱}{۴}$ لوک (لا^{۲} + ۱)

(۱۴) مع $\frac{\text{لا زلا}}{(۱ + \text{لا})(۱ + \text{۲لا})^{۲}(۱ + \text{لا}^{۲})}$ = $\frac{۲}{۵}$ $\frac{۱}{\text{۲لا} + ۱}$ − $\frac{۱}{۲}$ لوک (۱ + لا) − $\frac{۷}{۵۰}$ لوک (۱ + لا^{۲}) + $\frac{۱۶}{۲۵}$ لوک (۱ + ۲لا) + $\frac{۱}{۵۰}$ مس$^{-۱}$ لا

(۱۵) مع $\frac{\text{لا}^{۲}\ \text{زلا}}{۱ + \text{لا}^{۴}}$ = $\frac{۱}{\text{۴}\sqrt{۲}}$ لوک $\frac{\text{لا}^{۲} - \text{لا}\sqrt{۲} + ۱}{\text{لا}^{۲} + \text{لا}\sqrt{۲} + ۱}$ + $\frac{۱}{\text{۲}\sqrt{۲}}$ [مس$^{-۱}$ (لا$\sqrt{۲}$ + ۱) + مس$^{-۱}$ (لا$\sqrt{۲}$ − ۱)]

(۱۶) مع $\frac{\text{لا}^{۲}\ \text{زلا}}{۱ + \text{لا}^{۶}}$ = $\frac{۱}{۱۲}$ لوگ (لا^{۴} − لا^{۲} + ۱) − $\frac{۱}{۶}$ لوک (لا^{۲} + ۱) + $\frac{۱}{\text{۲}\sqrt{۳}}$ [مس$^{-۱}$ (۲لا − $\sqrt{۳}$) − مس$^{-۱}$ (۲لا + $\sqrt{۳}$)]

(۱۷) مع $\frac{\text{زی}}{\text{ی}^{۳}\sqrt{۱ - \text{ی}^{۳}}}$ فرض کرو کہ ۱ − ی^{۳} = ی^{۳} لا^{۳}

(۱۸) مع $\frac{\text{زلا}}{(۱ + \text{لا})\sqrt{۱ + \text{۳لا} + \text{۳لا}^{۲}}}$ فرض کرو کہ ی = $\frac{\text{لا}}{\text{لا} + ۱}$

باب سوم

استحالہ کی صور قانونیہ

اسواسطے $مع\ لا^{م-۱}\ ہا^{ع-۱}\ زلا = \frac{لا^{م}\ ہا^{ع}}{ط\ م} - \frac{ص\ (م + ن\ ع)}{ط\ م}\ مع\ لا^{م+ن-۱}\ ہا^{ع-۱}\ زلا$

ع کو ع + ۱ سے بدلو تو یہہ حاصل ہوگا

$$مع\ لا^{م-۱}\ ہا^{ع}\ زلا = \frac{لا^{م}\ ہا^{ع+۱}}{ط\ م} - \frac{ص\ (ء + ن\ ع + ن)}{ط\ م}\ مع\ لا^{م+ن-۱}\ ہا^{ع}\ زلا \quad ... (۳)$$

م کو م − ن سے تبدیل کرو اور منتقل کرو تو

$$مع\ لا^{م-۱}\ ہا^{ع}\ زلا = \frac{لا^{م-ن}\ ہا^{ع+۱}}{ص\ (م + ن\ ع)} - \frac{(م - ن)\ ط}{ص\ (م + ن\ ع)}\ مع\ لا^{م-ن-۱}\ ہا^{ع}\ زلا \quad (۴)$$

(۱) سے ہم نے ابھی عمل انتقال سے یہہ دریافت کیا تہا کہ

$$مع\ لا^{م+ن-۱}\ ہا^{ع-۱}\ زلا = \frac{لا^{م}\ ہا^{ع}}{ص\ ن\ ع} - \frac{م}{ص\ ن\ ع}\ مع\ لا^{م-۱}\ ہا^{ع}\ زلا$$

اور نیز $مع\ لا^{م-۱}\ ہا^{ع}\ زلا = ط\ مع\ لا^{م-۱}\ ہا^{ع-۱}\ زلا + \frac{لا^{م}\ ہا^{ع}}{ن\ ع} - \frac{م}{ن\ ع}\ مع\ لا^{م-۱}\ ہا^{ع}\ زلا$

اسواسطے $مع\ لا^{م-۱}\ ہا^{ع}\ زلا = \frac{لا^{م}\ ہا^{ع}}{م + ن\ ع} + \frac{ط\ ن\ ع}{م + ن\ ع}\ مع\ لا^{م-۱}\ ہا^{ع-۱}\ زلا \quad (۵)$

ع کو ع + ۱ سے تبدیل کرو اور منتقل کرو تو

$$مع\ لا^{م-۱}\ ہا^{ع}\ زلا = -\frac{لا^{م}\ ہا^{ع+۱}}{ط\ ن\ (ع + ۱)} + \frac{م + ن\ ع + ن}{ط\ ن\ (ع + ۱)}\ مع\ لا^{م-۱}\ ہا^{ع+۱}\ زلا \quad (۶)$$

(۳۱) اگر کوئی مثال ایسے پیش ہو کہ اوسمیں صورت قانونیہ کارگر ہوسکے تو یا تو اوس صورت کو لکھ لو یا حاصل مطلوب کو بغیر اسکی وساطت کے دریافت کرو مثلاً ہم کو $مع\ \frac{لا^{م}\ زلا}{\sqrt{۲س لا - لا^{۲}}}$ کا مطلوب ہی تو

$$مع\ \frac{لا^{م}\ زلا}{\sqrt{۲س لا - لا^{۲}}} = -مع\ \frac{ز\sqrt{۲س لا - لا^{۲}}}{زلا}\ لا^{م-۱}\ زلا$$

$$= -\sqrt{۲س لا - لا^{۲}}\ لا^{م-۱} + (م-۱)\ مع\ لا^{م-۲}\ \sqrt{۲س لا - لا^{۲}}\ زلا$$

$$= -\sqrt{۲س لا - لا^{۲}}\ لا^{م-۱} + (م-۱)\ \frac{(۲س لا - لا^{۲})\ لا^{م-۲}\ زلا}{\sqrt{۲س لا - لا^{۲}}}$$

اور عمل انتقال سے

$$\frac{لا^{م}\ زلا}{\sqrt{۲س لا - لا^{۲}}} = -\sqrt{۲س لا - لا^{۲}}\ لا^{م-۱} + (م-۱)\ ۲س\ مع\ \frac{لا^{م-۱}\ زلا}{\sqrt{۲س لا - لا^{۲}}}\ (۱ + م - ۱)\ مع$$

اسواسطے

$$مع\ \frac{لا^{م}\ زلا}{\sqrt{۲س لا - لا^{۲}}} = -\frac{لا^{م-۱}\sqrt{۲س لا - لا^{۲}}}{م} + \frac{(۲م-۱)\ س}{م}\ مع\ \frac{لا^{م-۱}\ زلا}{\sqrt{۲س لا - لا^{۲}}} \quad ...(۱)$$

اگر ط = ۲س اور ص = −۱ اور ن = ۲ اور ع = −½ کے ہو اور م کو م + ۱ سے بدلیں تو یہہ نتیجہ

اور لا ـ سہ = لا کے رکہنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{مع}\left[\frac{\text{ز لا}}{(\text{لا}-\text{سہ})^2+\text{صہ}^2}\right] = \text{مع}\left[\frac{\text{ز لا}}{\text{لا}^2+\text{صہ}^2}\right]$$

پس اوپر کی صورت قانونیہ قابل کام مین آنے کے ہوگئی

(۳۳) یہہ استحالہ کی صور قانونیہ وہان بڑا کام دیتی ہین جہان کلی خاص حدود غائی کے درمیان نکالنی پڑتی ہین فرضکرو کہ ہج (لا) و ھہ (لا) و ھج (لا) جملے لا کے ایسے ہین کہ

$$\text{مع ہج (لا) ز لا} = \text{ھہ (لا)} + \text{مع ھج (لا) ز لا}$$

$$\text{تو } {}_{\text{ط}}^{\text{ص}}\text{مع (لا) ز لا} = \text{ھہ(ص)} - \text{ھہ(ط)} + {}_{\text{ط}}^{\text{ص}}\text{مع ھج (لا) ز لا}$$

دفعہ ۳ سے یہہ ظاہر ہے

مثلاً یہہ ثابت ہوسکتا ہے کہ

$$\text{مع}(\text{س}^2-\text{لا}^2)^{\frac{\text{ن}}{2}}\text{ز لا} = \frac{\text{لا}(\text{س}^2-\text{لا}^2)^{\frac{\text{ن}}{2}}}{\text{ن}+1} + \frac{\text{ن س}^2}{\text{ن}+1}\text{مع}(\text{س}^2-\text{لا}^2)^{\frac{\text{ن}}{2}-1}\text{ز لا}$$

فرض کرو $\frac{\text{ن}}{2}$ مثبت مقدار ہے تو لا $(\text{س}^2-\text{لا}^2)^{\frac{\text{ن}}{2}}$ معدوم جب ہوتا ہے کہ لا = ۰ اور لا = س اسے معلوم ہوا کہ

$${}^{\text{س}}_{\cdot}\text{مع}(\text{س}^2-\text{لا}^2)^{\frac{\text{ن}}{2}}\text{ز لا} = \frac{\text{ن س}^2}{\text{لا}+1}\,{}^{\text{س}}_{\cdot}\text{مع}(\text{س}^2-\text{لا}^2)^{\frac{\text{ن}}{2}-1}\text{ز لا}$$

اسی کے مشابہ یہہ مثال ہے تو کلی بالاجزا سے

$$\text{مع لا}^{\text{ر}-1}(1-\text{لا})^{\text{ن}-1}\text{ز لا} = -\frac{(1-\text{لا})^{\text{ن}}}{\text{ن}}\text{لا}^{\text{ر}-1} + \frac{\text{ر}-1}{\text{ن}}\text{مع لا}^{\text{ر}-2}(1-\text{لا})^{\text{ن}}\text{ز لا}$$

اسے معلوم ہوا کہ

$${}^{1}_{\cdot}\text{مع لا}^{\text{ر}-1}(1-\text{لا})^{\text{ن}-1}\text{ز لا} = \frac{\text{ر}-1}{\text{ن}}\,{}^{1}_{\cdot}\text{مع لا}^{\text{ر}-2}(1-\text{لا})^{\text{ن}}\text{ز لا}$$

پس اگر ر صحیح ہو تو ہم کلی کا استحالہ یہہ کرسکتے ہین کہ

${}^{1}_{\cdot}\text{مع}(1-\text{لا})^{\text{ن}+\text{ر}-2}\text{ز لا}$ یعنی $\frac{1}{\text{ن}+\text{ر}-1}$ ہو اسے معلوم ہوا

$${}^{1}_{\cdot}\text{مع لا}^{\text{ر}-1}(1-\text{لا})^{\text{ن}-1}\text{ز لا} = \frac{(\text{ر}-1)(\text{ر}-2)\cdots 3\times 2\times 1}{\text{ن}(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)\cdots(\text{ن}+\text{ر}-1)}$$

(۳۴) علم مثلثی جملون کی کلی نکالنی استحالہ کی صور قانونیہ سے آسان ہوجاتی ہی فرضکرو کہ ہج (حب لا و حم لا) کوئی جملہ حب لا اور حم لا کا ہو تو اگر ہم جب لا = سے کے رکہین

انتقال سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ن مع حب^{ن} لا زلا = − جم لا حب$^{ن-۱}$ لا + (ن − ۱) مع حب$^{ن-۲}$ لا زلا

اسواسطے مع حب^{ن} لا زلا = − $\frac{جم لا حب^{ن-۱} لا}{ن}$ + $\frac{ن-۱}{ن}$ مع حب$^{ن-۲}$ لا زلا

اخر مساوات سے یہہ استنباط ہوتا ہے کہ

مع$_{٠}^{\frac{ط}{۲}}$ حب^{ن} لا زلا = $\frac{ن-۱}{ن}$ مع$_{٠}^{\frac{ط}{۲}}$ حب$^{ن-۱}$ لا زلا

اور علی ہذا القیاس مع$_{٠}^{\frac{ط}{۲}}$ حب$^{ن-۲}$ لا زلا = $\frac{ن-۳}{ن-۲}$ مع$_{٠}^{\frac{ط}{۲}}$ حب$^{ن-۴}$ لا زلا

پس اسطرح عمل کرنیمیں اگر ن جفت صحیح عدد ہو تو مع$_{٠}^{\frac{ط}{۲}}$ زلا پر نوبت پہونچیگی اور اگر ن طاق صحیح عدد ہو تو مع$_{٠}^{\frac{ط}{۲}}$ جب لا زلا پر جو واحد ہے نوبت پہونچیگی اس سے معلوم ہوا کہ اگر ن کوئی صحیح ہو تو

مع$_{٠}^{\frac{ط}{۲}}$ حب^{ن} لا زلا = $\frac{(ن-۱)(ن-۳)(ن-۵)\cdots۱}{ن(ن-۲)(ن-۴)\cdots۲}$ $\frac{ط}{۲}$ (ن جفت ہی)

مع$_{٠}^{\frac{ط}{۲}}$ حب^{ن} لا زلا = $\frac{(ن-۱)(ن-۳)(ن-۵)\cdots۲}{ن(ن-۲)(ن-۴)\cdots۳}$ (ن طاق ہو)

اگر حب لا کو جم لا سے بدل دین تو تحقیقات سے معلوم ہوگا کہ یہہ دو نتیجے اس حالت مین بہی قائم رہینگے

(۴۶) نتائج گذشتہ سے ہم ایک مسئلہ عظیم استخراج کرتے ہین اوسکا نام والس کی صورت قانونیہ ہے

فرض کرو کہ ن جفت ہو تو

مع$_{٠}^{\frac{ط}{۲}}$ حب^{ن} لا زلا = $\frac{ن-۱}{ن}\cdot\frac{ن-۳}{ن-۲}\cdot\frac{ن-۵}{ن-۴}\cdots\frac{۳}{۴}\cdot\frac{۱}{۲}\cdot\frac{ط}{۲}\cdots$ (۱)

مع$_{٠}^{\frac{ط}{۲}}$ حب$^{ن-۱}$ لا زلا = $\frac{ن-۲}{ن-۱}\cdot\frac{ن-۴}{ن-۳}\cdot\frac{ن-۶}{ن-۵}\cdots\frac{۲}{۳}\cdots$ (۲)

اب یہہ ظاہر ہے کہ مع$_{٠}^{\frac{ط}{۲}}$ حب$^{ن-۱}$ لا زلا چھوٹا بنسبت مع$_{٠}^{\frac{ط}{۲}}$ حب$^{ن-۲}$ لا زلا سے اور بڑا بنسبت مع$_{٠}^{\frac{ط}{۲}}$ حب^{ن} لا زلا کے ہے کیونکہ ہر ایک جز ترکیبی اول کلی کا چھوٹا دوسری کلی مین اپنی نظیر کے جز ترکیبی سے ہی اور تیسری کلی اپنی نظیر کے جز ترکیبی سے بڑا ہے اور یہہ ثابت ہو چکا ہے کہ

$$\frac{مع_{٠}^{\frac{ط}{۲}} حب^{ن} لا زلا}{مع_{٠}^{\frac{ط}{۲}} حب^{ن-۲} لا زلا} = \frac{ن-۱}{ن}$$

حد غائی اوسوقت معلوم ہوجاتی ہین جسوقت جملہ صحیح (لد) کا جسکا سر جزوی صحیح (لد) ہی دریافت ہوتا ہی ابتدا مین اسی بیان کر کے آگے جو صفحون مین لکہا ہے اوسمین مختلف صورتون مین صحیح (لد) کے دریافت کرنیکی ترکیبین بیان کین ہین

اب ہم چند مسائل اور کیفیتین اور زیادہ لکہتے ہین جنمین سے بعض کے لئے ضرور ہی کہ طالب علمون کی توجہ تجمیع پر ہو جسکو ابتدا مین بیان کیا ہی اور اوسی پر تمام اس علم کی بنا قائم کی ہے

(۳۸) فرض کرو کہ ہمکو کلی جب لد کی حدود غائی ط اور ص کے درمیان صرف تعریف سے بلا واسطہ دریافت کرنی ہے بموجب دفعہ ۳ کے جب ن غیر متناہی ہو تو ہمکو حد غائی

$$\text{ه}\left[\text{جب ط} + \text{جب}(\text{ط}+\text{ه}) + \text{جب}(\text{ط}+۲\text{ه}) \cdots + \text{جب}(\text{ط}+(\text{ن}-۱)\text{ه})\right]$$

دریافت کرنی ہے اسمین $\text{ن} = \frac{۱}{\text{ه}}(\text{ص}-\text{ط})$

علم مثلث سے یہہ بات ثابت ہے کہ یہہ سلسلہ

$$= \frac{\text{ه جب}\left(\text{ط}+\frac{\text{ن}-۱}{۲}\text{ه}\right)\text{جب}\frac{\text{ن ه}}{۲}}{\text{جب}\frac{\text{ه}}{۲}} = \frac{\text{ه جب}\left(\text{ط}+\frac{\text{ص}-\text{ط}}{۲}-\frac{\text{ه}}{۲}\right)\text{جب}\frac{\text{ص}-\text{ط}}{۲}}{\text{جب}\frac{\text{ه}}{۲}}$$

حد غائی $\frac{\text{ه}}{\text{جب}\frac{\text{ه}}{۲}}$ کی جب ن غیر متناہی ہو اور اسواسطے ه جاتی صفر ہو ۲ ہے اسلئے معلوم ہوا کہ کلی مطلوب

$$۲\,\text{جب}\frac{\text{ص}+\text{ط}}{۲}\,\text{جب}\frac{\text{ص}-\text{ط}}{۲} = \text{جم ط} - \text{جم ص}$$

(۳۹) جب ن غیر متناہی بنایا تو حد غائی اس سلسلہ

$$\frac{\text{ن}}{\text{ن}^۲} + \frac{\text{ن}}{\text{ن}^۲+۱^۲} + \frac{\text{ن}}{\text{ن}^۲+۲^۲} + \frac{\text{ن}}{\text{ن}^۲+۳^۲} \cdots + \frac{\text{ن}}{\text{ن}^۲+(\text{ن}-۱)^۲}$$

کی دریافت کرنی مطلوب ہے

اس سلسلہ کو اس طرح لکہہ سکتے ہین کہ

$$\frac{۱}{\text{ن}}\left\{\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱+\left(\frac{۱}{\text{ن}}\right)^۲} + \frac{۱}{۱+\left(\frac{۲}{\text{ن}}\right)^۲} + \frac{۱}{۱+\left(\frac{۳}{\text{ن}}\right)^۲} \cdots + \frac{۱}{۱+\left(\frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}}\right)^۲}\right\}$$

ه کو بجاے $\frac{۱}{\text{ن}}$ کے رکہو تو یہہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{ه}\left[\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱+\text{ه}^۲} + \frac{۱}{۱+(۲\text{ه})^۲} \cdots + \frac{۱}{۱+((\text{ن}-۱)\text{ه})^۲}\right]$$

دفعہ ۳ کے ساتھہ مقابلہ کرین تو ہم یہہ دیکھتے ہین کہ حد غائی مطلوب وہی ہے جسکو

ابع $\frac{زلا}{۱+لا^۲}$ سے تعبیر کرتے ہین اب مع $\frac{زلا}{۱+لا^۲}$ = مس ا لا اسے معلوم ہوا کہ یہہ حد غائی مطلوب

(۴۰) ہم $\int_{ط}^{ص}$ مح (لا) زلا کی جب ن غیر متناہی ہو یہہ تعریف کیا کرتے ہین کرو ہ حد غائی

ھہ$_۱$ مح (ط) + ھہ$_۲$ مح (لا$_۱$) ۔ ۔ ۔ + ھہ$_ن$ مح (لا$_{ن-۱}$) کی ہے

اب فرض کرو کہ ا اور ب بڑے سے بڑی اور کم سے کم قیمتین مح (لا) کی درمیان حدود غائی ط اور ص کے ہین تو سلسلہ کم

(ھہ$_۱$ + ھہ$_۲$ + ۔ ۔ + ھہ$_ن$) ا سے

اور بڑا (ھہ$_۱$ + ھہ$_۲$ ۔ ۔ ۔ ۔ + ھہ$_ن$) ب سے ہے

یعنی سلسلہ درمیان

(ص - ط) ا اور (ص - ط) ب

کے واقع ہوتا ہے اسواسطے حد غائی برابر (ص - ط) س کے ہوا اسمین س ایک مقدار ا اور ب کے درمیان ہے لیکن چونکہ مح (لا) پیوستہ فرض کیا گیا ہی اسواسطے جب لا کی قیمتون کی ترتیب ط سے ص تک ہوتی ہے تو اوسکی نوبت ہر قیمت پر درمیان ا اور ب کے پہونچیگی اسلیئے لا برابر س کی ہوگا جبکہ لا کی قیمت درمیان ط اور ص کے ہو بس

س = مح [ط + بر (ص - ط)] اسمین بر کسر واجب ہے اور

$\int_{ط}^{ص}$ مح (لا) زلا = (ص - ط) مح (ط + بر (ص - ط))

علی ہذا القیاس اگر ھج (لا) کی ایک ہی علامت اوس حالت مین ہو کہ لا درمیان ط اور ص کے واقع ہو تو یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ $\int_{ط}^{ص}$ مح (لا) ھج لا زلا = مح (ط + بر (ص - ط)) $\int_{ط}^{ص}$ ھج (لا) زلا

(۴۱) مساوات $\int_{ط}^{ص}$ مح (لا) زلا - $\int_{ط}^{س}$ مح (لا) زلا + $\int_{س}^{ص}$ مح (لا) زلا ۔ ۔ (۱)

کی صداقت بلا واسطہ ظاہر ہوگی اسواسطے کہ فرض کرو ھج (لا) کلی مح (لا) کی ہو تو داہنی طرف یہہ حاصل ہوگا کہ

ھج (ص) - ھج (ط)

اور بائین طرف یہہ ہوگا کہ

ھج (س) - ھج (ط) + ھج (ص) - ھج (س)

اور اسیطرح مساوات

ط. مع مح (لا) زلا = − ص. مع مح (لا) زلا . . . . (۲)

بظاہر صحیح ہے ہم یہہ بہی ثابت کر سکتے ہین کہ

ص. مع مح (لا) زلا = ط. مع مح (ط − لا) زلا . . . . . . (۳)

ط − لا = ے کے رکہو تو یہہ حاصل ہوگا

مع مج (ط − لا) زلا = − مع مح (ے) زے

اسواسطے ط. مع مج (ط − لا) زلا = − ط. مع مح (ے) زے

= ط. مع مح (ے) زے بموجب (۲) کے

البتہ ط. مع مج (ے) زے = ط. مع مح (لا) زلا اوس نتیجہ کے حاصل کرتے ہین جسمین لا یا ے ملتفت نہو خواہ رمز لا کو کام مین لاؤ یا رمز ے کو اسمین کسی بات کی پرواہ نہین مساوات (۱) سے یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

۲ط. مع مج (لا) زلا = ط. مع مج (لا) زلا + ۲ط ط مع مح (لا) زلا

دوسری صورت کلی بائین طرف مین لا کو ۲ط − لاَ سے بدلنے سے دریافت ہوگی کہ وہ برابر

ط. مع مج (۲ط − لاَ) زلاَ یا ط. مع مج (۲ط − لا) زلا

کے ہے اسے معلوم ہوا کہ

۲ط. مع مح (لا) زلا = ط. مع [مج (لا) + مح (۲ط − لا)] زلا

اسے معلوم ہوا کہ اگر لا کی اون تمام قیمتوں کے واسطے جو . اور ط کے درمیان ہین

مج (لا) = مج (۲ط − لا) تو یہہ حاصل ہوگا کہ

۲ط. مع مح (لا) زلا = ۲ ط. مع مج (لا) زلا . . . . (۴)

اور اگر مح (۲ط − لا) = − مح (لا) تو یہہ حاصل ہوگا کہ

بس ۲ط. مع مج (لا) زلا = . (۵)

مثلاً ط. مع جب^ن بر زبر = ۲ ط/۲. مع جب^ن بر زبر . . . موافق (۴) کے

اور Σ جم^3 بر ر بر $= 0$ موافق ہ سے کے

(۴۲) ایسی مساواتون پر جیسی کہ اوپر بیان ہوئی طالب علمون کو چاہئے کہ وہ بڑی احتیاط سے توجہ کرین اور جب تک اوسپر غور اور خوض کئے جائین جب تک اونکی سمجھ مین اونکی صداقت بدیہی اور ظاہر نہ معلوم ہو

Σ جم^3 برزبر بموجب حاوہ کے حد غائی اس سلسلہ کی ہی جب ن غیر متناہی ہو

ھ [جم^3 ھ + جم^3 بر ھ + جم^3 ۳ ھ ۰۰۰ + جم^3 (ن - ۱) ھ]

اسمین ن ھ = کہ اب

جم^3 ھ = - جم^3 (ن - ۱) ھ جم^3 ۲ ھ = - جم^3 (ن - ۲) ھ ۰۰۰

اب مثبت اور منفی رقمین اسمین ملکر ایک دوسرے کو فنا کر دیتی ہین اور اس سبب سے ماحصل صفر حاصل ہوتا ہے

اسیطرح سے Σ جب^2 برزبر = ۲ Σ جب^2 برزبر کی صداقت بلا واسطہ کلی کی تعریف سی اور اس امر واقعی سے کہ جیب کسی زاویہ کی برابر اپنی تکملہ کے جیب کے ہوتی ہے ثابت ہے

فرض کرو کہ ص بڑا یہ نسبت ط کے ہو اور مح (لا) ہمیشہ ط اور ص کے درمیان مثبت ہو تو ہر ایک رقم سلسلہ مح (لا) Δ لا کی مثبت ہی اور اسسے معلوم ہوتا ہی کہ حد غائی

طΣص مح (لا) ز لا کی ایک مثبت مقدار ہے

(۴۳) تمام بیانات جو اوپر ہوئی ہین اوسمین یہہ بات فرض کی گئی ہی کہ جملہ جسکی کلی نکالی جاتی ہے ہمیشہ متناہی کلی کی حدود غائی کی درمیان ہوتی ہی اسواسطے کہ اس بات کو ہمیشہ یاد رکہنا چاہئے کہ اس شرط کو ہمنے دفعہ ۲ کے دعوی کے بنیاد ٹہرایا ہی اسواسطی اگر جملہ جسکی کلی نکالنی مین کلی کے حدود غائی کے درمیان غیر متناہی ہو جائے تو اوس صورت مین قاعدے کلی نکالنی کے نہین کام آسکتے اسلئے اس خاص صورت کا معرض امتحان مین آنا ضرور ہی

Σ ز لا / $\sqrt{۱ - لا}$ پر خیال کرو قیمت اس کلی کی ۲ - ۲ $\sqrt{(۱ - ط)}$ ہے

یہان جملہ جسکی کلی نکالتے ہین جب لا = ۱ کے ہو غیر متناہی ہو جاتا ہی لیکن جب ط = ۱ کے ہو

جملہ ۲ – ۲ لو (ا – ط) کا متناہی رہتا ہی اس صورت مین ہم یہہ لکھہ سکتی ہین کہ

ٖمع زلالہ / (ا – لا) لو = ۲ بشرطیکہ ہم اسکو اختصار اس بیان کا سمجھین کہ

ٗمع زلالہ / (ا – لا) لو ہمیشہ متناہی رہتا ہی اگر ط چھوٹی مقدار واحد سے ہو اور ط کو کافی قریب واحد کے

مقرر کرکے کلی کی قیمت کو جسقدر چاہین ۲ سے کم کر سکتی ہین

اب ٗمع زلالہ / ا – لا تو قیمت اس کلی کی – لوگ (ا – ط) ہی اور یہہ غیر محدود زیادہ ہوتا ہی

جب ط قریب واحد کے ہوتا ہی اسے معلوم ہوا کہ اس صورت مین ہم ٖمع زلالہ / ا – لا = ∞ کے

لکھہ سکتے ہین بشرطیکہ ہم اسکو اختصار اس بیان کا سمجھین کہ

ٗمع زلالہ / ا – لا غیر محدود لا متناہی زیادہ ہوتا جاتا ہی جیسا کہ ط قریب واحد کے ہوتا جاتا ہے

اور ط کو کافی قریب واحد کی فرض کرکے کلی کو ہر مقدار معینہ سی بڑہا سکتی ہین

اب مع زلالہ / (ا – لا)لو پر خیال کرو یہان کلی ا / ا – لا ہی اگر بغیر اس کیفیت

لکھنے کی کہ جملہ جسکی کلی نکالتے ہین غیر متناہی جب ہو جاتا ہی کہ لا = ۱ ہو ہم کلی کی قیمت

حدود غائی ۰ اور ۲ کے درمیان دریافت کرنیکے لئے کہین تو ہم کو – ۱ – ۱ یعنی – ۲ حاصل ہوگا

مگر یہہ ظاہر غلط معلوم ہوتا ہی اسواسطے کہ اس صورت مین ہر ایک رقم سلسلہ کی

جو مح (لا) ∆ لا سے تعبیر ہوتا ہی مثبت ہی اور اسلئے حد غائی نفی ہو نہین سکتی حقیقت مین

ٖمع زلالہ / (ا – لا)لو اور ٗمع زلالہ / (ا – لا)لو دونو غیر متناہی ہین اس مثال سے ثابت ہوتا ہی کہ کلی کا نکالنا

حدود غائی معینہ کی درمیان اوسحالت مین کہ جملہ جسکے کلی نکالتے ہین اون حدود کی درمیان

غیر متناہی ہو جاے موافق قواعد معمولی کی نہین ہو سکتا

(۴۴) دفعہ ۲ کی تحقیقات مین جس پر سارے علم کی بنا قائم ہی یہہ فرض کیا گیا ہی کہ قیمت ٖمعٗ مح (لا) زلا

اور حدود غائی ط اور ص اور مح (لا) متناہی فرض کئے گئے ہین لیکن اسمین بڑی آسانی

ہوگی کہ ہم ایک حد غائی یا دونو حدود غائی کو غیر متناہی فرض کرین اور یہہ بات مثالون سے

ظاہر ہو جائیگی

اب ط سے – ط تک لا زیادہ ہوتا ہی اسے معلوم ہوا کہ بر کی حدود غائی معینہ ایسی ہونی چاہیئے کہ وہ مطابق لا کی ان قیمتون کے سلسلے کے ہوجب کہ لا = – ط تو بر کی قیمت کوئی اس صورت قانونیہ (۲ن – ۱) ط/۲ مین سے ہو سکتی اور اسمین ن کوئی محدود صحیح عدد ہی تو لا = ط کی قیمت کے مطابق ہمکو بر = (۲ن – ۱) ط/۲ + کہ لینا چاہیئے تو یہہ بات امتحان سے ظاہر ہو جائیگی چونکہ لا – ط سے + ط تک لا بدلتا ہی تو وہ متواتر زیادہ ہوتا ہے اور صرف ایک دفعہ نوبت اوسکی صفر پر پہونچتی ہے

اسے معلوم ہوا کہ مع ط/(ط – لا) ز لا/ ... = کہ

اکثر مبتدیون کو یہہ امر مشکل معلوم ہوا کرتا ہے اسلئے ہم ایک اور مثال لکھتے ہین

فرض کرو کہ مع قط^۲ بر ز بر / (ط^۲ + مس^۲ بر) مطلوب ہے

ہمکو معلوم ہے کہ مع قط^۲ بر ز بر / (ط^۲ + مس^۲ بر) = ۱/ط مس^-۱ (مس بر/ط)

اور چونکہ کلی حدود غائی ۰ اور کہ کے درمیان لینی ہی اسیواسطے ہمکو قیمتین مس^-۱ (مس بر/ط) ان صورتون مین دریافت کرنی چاہیئے

فرض کرو کہ ۰ و بر۱ و بر۲ و بر۳ ۰۰۰ ۲ن و کہ ایک سلسلہ مقادیر کا بالترتیب ہے تو بموجب کلی کی صفت ذاتی کے

مع لو ز بر = مع لو ز بر + مع لو ز بر + مع لو ز بر + ۰۰۰ + مع لو ز بر

اب بائین طرف کی کلیات مین سے ہر کلی کو ہم جسقدر چاہین چھوٹا ان کو بڑا کر سکتے ہین اور دو متصل کی مقادیر بر ر اور بر ر+۱ کی تفاوت کو جسقدر چاہین کم کر سکتے ہین پس اسے معلوم ہوا کہ رمز مس^-۱ (مس بر/ط) ایسی مقرر کرنی چاہیئے کہ مس^-۱ (مس بر ر+۱/ط) – مس^-۱ (مس بر ر/ط) غیر محدود چھوٹا اوس حالت مین ہو جائے جب کہ بر ر+۱ – بر ر غیر محدود چھوٹا ہو اسواسطے مس^-۱ (مس بر/ط) متواتر بر کے ساتہہ زیادہ ہو اور صرف ایک دفعہ اوسکی نوبت طاق اضعاف ط/۲ تک پہونچنے کہ بر درمیان ۰ اور کہ کے گذرتا ہے پس اگر

بس ت ا (س/ط بر) کی قیمت (م + ۱) که اوس حالت مین مقرر کرین که بر = که لس

قیمت کلی کی حدود غائی معینه کے درمیان ل/۲ط کے ہے

مبتدی طلبه اکثر یہه غلطی کرتے ہین که وه بجای اسکے که دوسری قیمت کی زیادتی کو پہلی قیمت پر تقدر که

لین وه دوسری قیمت کو ایسا ہی لیتے ہین جیسے که پہلی قیمت کو اور اسیطرح سے کلی مفروضه صفر

ہوجاتی ہے اور یہه دفعه ۴۲ کے برخلاف ہی   پہر اب فرض کرو که

$$\text{تکمع}\ \frac{(\text{ط} - \text{س جم بر})\ \text{ز بر}}{\text{ط}^2 + \text{س}^2 - 2\,\text{ط س جم بر}}\ \text{مطلوب ہے}$$

$$\text{مع}\ \frac{(\text{ط} - \text{س جم بر})\ \text{ز بر}}{\text{ط}^2 + \text{س}^2 - 2\,\text{ط س جم بر}} = \frac{1}{2\text{ط}}\ \text{مع} \left[1 + \frac{\text{ط}^2 - \text{س}^2}{\text{ط}^2 + \text{س}^2 - 2\,\text{ط س جم بر}} \right] \text{ز بر}$$

$$\text{پس کلی مطلوب}\ \frac{\text{ل}}{2\text{ط}} + \frac{\text{ط}^2 - \text{س}^2}{2\text{ط}}\ \text{مع}\ \frac{\text{ز بر}}{\text{ط}^2 + \text{س}^2 - 2\,\text{ط س جم بر}}\ \text{ہے}$$

$$\text{اب مع}\ \frac{\text{ز بر}}{\text{ط}^2 + \text{س}^2 - 2\,\text{ط س جم بر}}$$

$$= \text{مع}\ \frac{\text{قط}^2 \frac{1}{2}\text{بر}\ \text{ز بر}}{(\text{ط} - \text{س})^2 + (\text{ط} + \text{س})^2\ \text{مس}^2 \frac{1}{2}\text{بر}} = \frac{2}{\text{ط}^2 - \text{س}^2}\ \text{مس}^{-1} \left(\frac{\text{ط} + \text{س}}{\text{ط} - \text{س}}\ \text{مس}\ \frac{1}{2}\text{بر} \right)$$

جب یہه کلی حدود غائی معینه کے درمیان لیجای تو $\frac{2}{\text{ط}^2 - \text{س}^2} \frac{\text{ل}}{2}$ کے حاصل ہوگی اگر ط بڑا س سے ہو

اور = $\frac{\text{ل}}{\text{ط}^2 - \text{س}^2} \frac{\text{ل}}{2}$ کے حاصل ہوگی اگر ط چہوٹا س سے ہو

اس سے معلوم ہوا که قیمت کلی مفروضه کی ل/ط کے ہی اگر ط بڑا س سے ہو اور صفر ہی اگر ط چہوٹا س سے ہو

(۴۷) علم حساب الکلیات سے بعض مسایل عظیم سلسلون کے انفراج اور انضمام ہونے کے باب مین

بہت آسانی سے ثابت ہوتی ہین

اگر مج (لا) متواتر اوس حالت مین کم ہوتا جاے که لا اپنی قیمت ط سے آگے غیر متناہی زیاده ہوتا جاے

تو سلسله غیر متناہی مج (ط) + مج (ط + ۱) + مج (ط + ۲) + ۰ ۰ ۰ ۰

اور کلی ط^{∞} تکمع مج لا ز لا دونو متناہی ہین یا دونو غیر متناہی ہین

اسواسطے که مج (لا) کے متواتر کم ہونے سے $\text{ط}^{\text{ط}+1}$ تکمع مج (لا) ز لا چہوٹا

$\text{ط}^{\text{ط}+1}$ تکمع مج (ط) ز لا سے اور بڑا $\text{ط}^{\text{ط}+1}$ تکمع مج (ط + ۱) ز لا سے ہے یعنی

$^{ط+۱}$مع مج (لا) زلا چھوٹا بہ نسبت مج(ط) کی اور بڑا بہ نسبت مج (ط+۱) کی ہے
اور علی ہذا القیاس $^{ط+۲}_{ط+۱}$مع مج (لا) زلا چھوٹا بہ نسبت مج (ط+۱) کی اور بڑا بہ نسبت
مج (ط+۲) کی ہے اسطرح عمل کرنے سے ہم ثابت کر سکتے ہین کہ کلی $^{ع}_{ط}$مع مج (لا) زلا چھوٹا بہ نسبت

مج (ط) + مج (ط+۱) + مج (ط+۲) + ...

کے ہے لیکن بڑا بہ نسبت

مج (ط+۱) + مج (ط+۲) + مج (ط+۳) + ... ہین

اسسے معلوم ہوا کہ سلسلہ اور کلی دونو متناہی ہین یا دونو غیر متناہی ہین

(۴۸) اب فرض کرو کہ لوگ لا تعبیر لر (لا) سے اور لوک (لوک لا) تعبیر $لر^۲$ (لا) سے کیا جاے
اور اسیطرح علی ہذا القیاس تو ہم اس مسئلہ کو ثابت کرینگے کہ
سلسلہ جسکی رقم عام تنکا فی

ن لر (ن) $لر^۲$ (ن) ... $لر^ر$ (ن) $[لر^{ر+۱}$ (ن)$]^ع$

کی ہو انضمامی ہی اگر ع بڑا واحد سے ہو اور انفراجی ہی اگر ع چھوٹا واحد سے ہو

فرض کرو کہ مج (لا) = لا لر (لا) $لر^۲$ (لا) ... $لر^ر$ (لا) $[لر^{ر+۱}$ (لا)$]^ع$

تو مع مج (لا) زلا = $\frac{[لر^{ر+۱} (لا)]^{۱-ع}}{۱-ع}$ اگر ع واحد نہ ہو اور = $لر^{ر+۲}$ (لا)
اگر ع واحد ہو

اسسے معلوم ہوا کہ $^{ع}_{ط}$مع مج (لا) زلا = $-\frac{[لر^{ر+۱} (ط)]^{۱-ع}}{۱-ع}$ اگر ع بڑا بہ نسبت واحد کے ہو
اور غیر متناہی اگر ع برابر واحد کے یا چھوٹا واحد سے ہو

پس یہ ثابت ہوا کہ دفعہ ۴۷ سے مسئلہ مستنبط ہوتا ہی

(۴۹) اب وہ قاعدے بیان کرتے ہین جنسے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ سلسلہ غیر متناہی انضمامی ہے یا انفراجی
فرض کرو کہ ایک سلسلہ غیر متناہی

$\frac{۱}{چھ(ن)} + \frac{۱}{چھ(ن+۱)} + \frac{۱}{چھ(ن+۲)} + \frac{۱}{چھ(ن+۳)} + ...$ ہی

رقم عام کو $\frac{۱}{چھ(لا)}$ سے تعبیر کرو اب یہہ ظاہر ہے کہ سلسلہ انفراجی ہوگا اگر چھ (لا)

غیر محدود لد کے ساتھہ نہ زیادہ ہو اب یہہ ہم فرض کرینگے کہ ھج (لد) غیر محدود لد کے ساتھہ زیادہ ہوتا ہے

اول فرضکرو کہ لد ایک خاص قیمت ط سے لد کے ساتھہ غیر محدود جب زیادہ ہوتا ہے تو ۱/ھج لد ہمیشہ چھوٹا بہ نسبت س/لد ع کے رہتا ہی اسمین س اور ع مقادیر مستقل ہین اور ع بڑا بہ نسبت واحد کے ہی تو سلسلہ مفروضہ چھوٹا ایک خاص سلسلہ سے ہوگا جسکا انضمامی ہونا دفعہ ۲۷ سے معلوم ہوا ہے اسواسطے سلسلہ مفروض انضمامی ہے

اگر ۱/ھج (لد) چھوٹا بہ نسبت س/لد ع کے ہو تو لد ع چھوٹا بہ نسبت س ھج (لد) کے ہو اور لوکارثم کے لینے سے ہمکو دریافت ہوتا ہے کہ ع چھوٹا بہ نسبت لوک س ھج (لد)/لوک لد کے ہے

اخر جملہ کی صورت بیانیہ کی صورت ھج/ھج ہو گی جب لد غیر متناہی ہو ایسی صورت بیانیہ کی قیمت دریافت کرنکی جو قواعد معمولی ہین اونکی موافق اوسکا مساوی لد ھج (لد)/ھج (لد) حاصل ہوگا

اسواسطے اگر حد غائی لد ھج (لد)/ھج (لد) کی جب لد غیر متناہی بڑی بہ نسبت واحد کی ہو تو ہم ایک مقدار ع کی بڑی بہ نسبت واحد کے ایسی دریافت کر سکتے ہین کہ لد ع ہمیشہ چھوٹی بہ نسبت س ھج (لد) کے ہو اسے معلوم ہوا کہ سلسلہ انضمامی ہے

اسیطرح سے یہہ بھی ثابت ہو سکتا ہی کہ اگر حد غائی لد ھج (لد)/ھج (لد) کی جب لد غیر متناہی ہو چھوٹی بہ نسبت واحد کے ہو تو ہم ایک مقدار ع چھوٹی بہ نسبت واحد کے ایسی دریافت کر سکتے ہین کہ لد ع ہمیشہ بڑی بہ نسبت س ھج (لد) کے ہو اسے معلوم ہوا کہ سلسلہ مفروضہ ایک خاص سلسلہ انفراجی سے بڑا ہی اسواسطے خود وہ سلسلہ انفراجی ہی

دوم پس اگر حد غائی لد ھج (لد)/ھج (لد) کی جب لد غیر متناہی ہو بڑی یا چھوٹی واحد سے ہو تو خاصیت سلسلہ کی تشخیص ہو جاتی ہے لیکن اگر یہہ حد غائی واحد ہو تو زیادہ اور تحقیقات کی ضرورت ہوتی ہے

فرضکرو کہ جب لد غیر محدود ایک خاص قیمت ط سے زیادہ ہوتا ہے تو ۱/ھج (لد) ہمیشہ چھوٹا بہ نسبت س/لد [لو (لد)]ع کے ہوتا ہے اسمین س اور ع مقادیر مستقل ہین اور ع بڑا بہ نسبت

واحد کے ہوتا ہے تو سلسلہ مفروض چھوٹا ایک خاص سلسلہ سے ہی جسکا انضمامی ہونا دفعہ ۴۸ سے معلوم ہوا ہے اسواسطے سلسلہ مفروض خود ہی انضمامی ہی اگر $\frac{1}{\text{ھج(لا)}}$ چھوٹا بہ نسبت $\frac{\text{س}}{\text{لا}[\text{لر(لا)}]^{\text{ع}}}$ کے ہو تو $[\text{لر(لا)}]^{\text{ع}}$ چھوٹا بہ نسبت $\frac{\text{س ھج(لا)}}{\text{لا}}$ کے ہوگا لوکارثم کے لینے سے ہمکو معلوم ہوتا ہے کہ ع چھوٹا بہ نسبت لوگ $\frac{\text{س ھج(لا)}/\text{لا}}{\text{لر}^{\text{۲}}\text{(لا)}}$ یعنی ع چھوٹا بہ نسبت $\frac{\text{لوگ س ھج(لا)} - \text{لر(لا)}}{\text{لر}^{\text{۲}}\text{(لا)}}$ کے ہے اور حد غائی اس سلسلہ کی جب لا غیر متناہی ہو وہی ہو جو حد غائی لر(لا)، $\left[\frac{\text{لا ھج}'\text{(لا)}}{\text{ھج(لا)}} - 1\right]$ کی ہے اس سے معلوم ہوا کہ اگر حد غائی اس اخر صورت بیانیہ کی بڑی بہ نسبت واحد کے ہو تو سلسلہ مفروض انضمامی ہوگا

اسیطرح ثابت ہو سکتا ہی کہ اگر اخر صورت بیانیہ کی حد غائی چھوٹی بہ نسبت واحد کے ہو تو سلسلہ مفروض انفراجی ہوتا ہی

سوم اگر حد غائی لر(لا) $\left[\frac{\text{لا ھج}'\text{(لا)}}{\text{ھج لا}} - 1\right]$ کی جب لا غیر متناہی ہو واحد ہے، تو اور زیادہ تحقیقات کی ضرورت پڑتی ہے رقم عام سلسلہ مفروضکی $\frac{1}{\text{لا لر(لا)}[\text{لر}^{\text{۲}}\text{(لا)}]^{\text{ع}}}$ کے ساتھہ مقابلہ ہو سکتی ہے

اس طرح عمل کرنے سے ہمکو یہہ نتیجہ حاصل ہوتا ہی کہ فرض کرو

$\text{ع}_{\text{.}} = \frac{\text{لا ھج}'\text{(لا)}}{\text{ھج(لا)}}$ اور $\text{ع}_{1} = \text{لر(لا)} (\text{ع}_{\text{.}} - 1)$ $\text{ع}_{2} = \text{لر}^{\text{۲}}\text{(لا)} (\text{ع}_{1} - 1)$

اور علی العموم $\text{ع}_{\text{م}} = \text{لر}^{\text{م}}\text{(لا)} (\text{ع}_{\text{م}-1} - 1)$ اور فرض کرو کہ $\text{ع}_{\text{ر}}$ ارقام $\text{ع}_{\text{.}}$ و ع_{1} و ع_{2} ... مین سے وہ اول رقم ہی جسکی حد غائی جب ہوتی ہی کہ لا غیر متناہی ہو

پس سلسلہ مفروضہ انضمامی ہے اگر حد غائی $\text{ع}_{\text{ر}}$ کی بڑی بہ نسبت واحد کے ہو اور انفراجی ہے اگر $\text{ع}_{\text{ر}}$ چھوٹی بہ نسبت واحد کے ہو

ہمنے رقم عام سلسلہ کو $\frac{1}{\text{ھج(لا)}}$ سے تعبیر کیا ہے اگر اوسکو ھر(لا) سے تعبیر کرین تو $\frac{1}{\text{ھر(لا)}}$ کو بجاے ھج(لا) کے نتیجہ بالا مین رکھہ سکتے ہین اسے ہمکو یہہ معلوم ہوتا ہی کہ $\text{ع}_{\text{.}} = - \frac{\text{لا ھر}'\text{(لا)}}{\text{ھر(لا)}}$ نقط الیسی ترمیم کی ضرورت تہی

(۵۰) اس نتیجه کی ایک اور صورت یہی ہو سکتی ہی علم حساب الجزئیات سے یہه معلوم ہوتا ہی کہ

ه (لا + ۱) − ه (لا) = ه (لا + یر) آپس بر بعض کسر واجب ہے اسی معلوم ہوا کہ

ه (لا + یر) / ه (لا + ۱) = لا [۱ − ه (لا) / ه (لا + ۱)]

اسواسطے جب لا بغیر متناہی ہو حد غائی لا ه (لا) / ه (لا) برابر حد غائی

لا [۱ − ه (لا) / ه (لا + ۱)] کے ہے پس ہم ح = لا [ه (لا) / ه (لا + ۱) − ۱]

دفعه ۴۹ کے نتیجه مین رکهه سکتے ہین

مسائل ۴۷ و ۴۸ و ۴۹ ڈی مورگس صاحب کے علم حساب الجزئیات وکلیات سے نقل کئے گئے ہین

دفعه ۴۸ کے مسئلہ کا اصولی اثبات جبر ومقابله باب ۵۶ مین دیکهو

(۵۱) تمع (۰ سے ۱/۲ کد) لوگ جب لا زلا کو دریافت کرو

بموجب مساوات (۳) دفعه ۴۱ کے

تمع لوگ جب لا زلا = تمع لوگ جب (۱/۲ کد − لا) زلا = تمع لوگ جم لا زلا

اسے معلوم ہوا کہ کلی مطلوب کی جگهه ی کے رکهنے سے

۲ ی = تمع (لوگ جب لا + لوگ جم لا) زلا

= تمع لوگ (جب لا جم لا) زلا

= تمع لوگ (جب ۲ لا / ۲) زلا

= تمع [لوگ جب ۲ لا − لوگ ۲] زلا

= تمع لوگ جب ۲ لا زلا − ۱/۲ کد لوگ ۲

۲ لا = لاَ کے رکهنے سے ہم کو یہه حاصل ہوتا ہے کہ

تمع لوگ جب ۲ لا زلا = ۱/۲ تمع (۰ سے کد) لوگ جب لاَ زلاَ

= تمع لوگ جب لا زلا بموجب مساوات (۴) دفعه ۴۱ کے

اسواسطے ۲ ی = ی − ۱/۲ کد لوگ ۲

اسواسطے ی = کہ/۴ لوک ۱/۲

اب پہر کمع برا لوک جب برزبر = کمع (کہ - بر) لوگ جب برزبر بموجب مساوات

(۳) دفعہ ۵۱ کے اسواسطے

کمع برلوک جب برزبر = کہ/۲ کمع لوگ جب برزبر = کہ/۴ لوگ ۱/۲

ابمع لوگ (۱ + لا) / ۱ + لا^۲ زلا مطلوب ہے لا = مس ی کے رکہو تو کلی کی یہہ صورت ہوگی

کہ/۴ مع لوگ (۱ + مس ی) زی لیکن بموجب مساوات (۳) دفعہ ۵۱ کے

کہ/۴ مع لوگ (۱ + مس ی) زی = کہ/۴ مع لوگ [۱ + مس (کہ/۴ - ی)] زی

اور ۱ + مس (کہ/۴ - ی) = ۱ + (۱ - مس ی)/(۱ + مس ی) = ۲/(۱ + مس ی)

اسواسطے ۲ کہ/۴ مع لوگ (۱ + مس ی) زی = کہ/۴ لوگ ۲

اسواسطے ابمع لوگ (۱ + لا) / ۱ + لا^۲ زلا = کہ/۸ لوگ ۲

(۵۲) مح (ط + ھ) کی صورت مفصلہ جو قوارھ مین ہو او سمین بعد ن + ارقمون کے جو باقی رہے وہ کلی محدود سے تعبیر ہو سکتی ہے اسواسطے کہ فرض کرو

ح (ے) = مح (لا - ے) + ے مح' (لا - ے) + ے^۲/|۲ مح'' (لا - ے) ... + ے^ن/|ن مح^ن (لا - ے)

بلحاظ ے کے سر جزوی لو تو

ح' (ے) = - ے^ن/|ن مح^{ن+۱} (لا - ے)

دونو ارکان مساوات کی کلی حدود غائی ۰ اور ھ کے درمیان لو تو

ح (ھ) - ح (۰) = - ۱/|ن ھمع ے^ن مح^{ن+۱} (لا - ے) زے

یعنی

مح (لا - ھ) + ھ مح' (لا - ھ) + ھ^۲/|۲ مح'' (لا - ھ) ... + ھ^ن/|ن مح^ن (لا - ھ) - مح (لا)

= - ۱/|ن ھمع ے^ن مح^{ن+۱} (لا - ے) زے

ط + ھ کو لا کی جگہہ رکہو اور منتقل کرو تو

مح (ط + ھ) = مح (ط) + ھ مح' (ط) + ھ^۲/۲ مح'' (ط) + ... + ھ^ن/|ن مح^ن (ط)

$$+ \frac{1}{\lfloor ن} مع\, ے^{ن}\, مح^{ن+1} (ط + ھ - ے)\, زے$$

مح (ط + ھ) کی صورت منفصلہ مین جو بموجب ٹیلر صاحب کے ضابطہ کے پہیلائی جاے او سمین اون (ن + ۱) رقمون کے مجموعہ پر زیادتی مح (ط + ھ) کی اس کلی محدود سے تعبیر ہوتی ہے

$$\frac{1}{\lfloor ن} مع\, ے^{ن}\, مح^{ن+1} (ط + ھ - ے)\, زے$$

دفعہ ۳۹ کے اول نتیجہ کے کلی محدود کو اسطرح لکھہ سکتے ہین کہ

$$\frac{بر^{ن}\, ھ^{ن+1}}{\lfloor ن}\, مح^{ن+1} (ط + ھ - بر ھ)$$

اسمین بر کسر واجب ہے

اور دفعہ ۴۰ کے نتیجہ دوم کے موافق اس کلی محدود کو اس صورت مین رکھہ سکتے ہین

$$\frac{1}{\lfloor ن}\, مح^{ن+1} (ط + ھ - بر ھ)\, مع\, ے^{ن}\, زے$$

یعنی

$$\frac{ھ^{ن+1}}{\lfloor ن+1}\, مح^{ن+1} (ط + بر_1 ھ)$$

اسمین بر۱ بھی کسر واجب ہے

(۵۳) **برنولی کا سلسلہ** کلی بالاجزا سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے

$$مع\, مح (لا)\, زلا = لا\, مح (لا) - مع\, لا\, مح' (لا)\, زلا$$

$$مع\, لا\, مح' (لا)\, زلا = \frac{لا^2}{2} مح' (لا) - مع\, \frac{لا^2}{2} مح'' (لا)\, زلا$$

$$مع\, لا^2\, مح'' (لا)\, زلا = \frac{لا^3}{3} مح'' (لا) - مع\, \frac{لا^3}{3} مح''' (لا)\, زلا$$

$$پس\; مع\, مح (لا)\, زلا = لا\, مح (لا) - \frac{لا^2}{1 \times 2} مح' (لا) + \frac{لا^3}{\lfloor 3} مح'' (لا) \ldots$$

$$+ \frac{(-1)^{ن-1}\, لا^{ن}}{\lfloor ن} مح^{ن-1} (لا) + \frac{(-1)^{ن}}{\lfloor ن} مع\, لا^{ن}\, مح^{ن} (لا)\, زلا$$

$$اسواسطے\; مع^{ط}\, مح (لا)\, زلا = ط\, مح (ط) - \frac{ط^2}{1 \times 2} مح' (ط) + \frac{ط^3}{\lfloor 3} مح'' (ط) \ldots$$

$$+ \frac{(-1)^{ن-1}\, ط^{ن}\, مح^{ن-1} (ط)}{\lfloor ن} + \frac{(-1)^{ن}}{\lfloor ن} مع^{ط}\, لا^{ن}\, مح^{ن} (لا)\, زلا$$

یہہ سلسلہ بائین طرف برنولی کا سلسلہ کہلاتا ہے بعض صورتون مین یہہ عمل $مع^{ط}\, مح (لا)\, زلا$ کی حاصل کرنے مین کام آتا ہے مثلاً اگر مح (لا) ایک جملہ جبریہ ناطقہ (ن − ۱) درجہ کا تو $مح^{ن} (لا)$ صفر ہے

فرض کرو کہ یہہ جملہ صح (لا) ہی تو اب ہم کو یہہ مطلوب ہے کہ وہ جملہ دریافت کرین جسکا سر جزو صح (لا) ہی اسکو مع صح (لا) زلا سے یعنی مع مع صح (لا) زلا زلا سے تعبیر کرتے ہین اور علی ہذا القیاس مثلاً کلی ی ک لا کی ک ۱/ ی ک لا + س ۱ ہے اسمین س ۱ مقدار مستقل ہی اور اسکی کلی

ک ۱/۲ ی ک لا + س ۱ لا + س ۲ ہی

اور کلی اسکی یہہ ہے کہ

ک ۱/۳ ی ک لا + س ۱ لا۲/۲ + س ۲ لا + س ۳

اسمین س۱/۲ ایک مقدار مستقل ہے اور سادگی اور آسانی کیلئے اوسکو ب سے اگر خوشی ہو تو تعبیر کرو پس اسطرح عمل کرنے سے ن مرتبہ متواتر ی ک لا کی کلی نکالنی سے یہہ حاصل ہوگا کہ

ی ک لا / ک ن + ا ۱ لا ن−۱ + ا ۲ لا ن−۲ + ... + ا ن−۱ لا + ا ن

اسمین ا ۱ و ا ۲ ... ا ن مقادیر مستقل ہین

یہہ آسان بات ہے کہ کلی مکرہ ارقام کلی مفرد مین بیان کرین اسواسطے کہ فرض کرو لو ایک جملہ لا کا ہے تو فرض کرو

لو ۱ = مع لو زلا اور لو ۲ = مع لو ۱ زلا اور لو ۳ = مع لو ۲ زلا کلی بالاجزا کی نکالنے سے

لو ۲ = مع لو ۱ زلا = لا لو ۱ − مع لا زلو۱/زلا زلا = لا مع لو زلا − مع لا لو زلا

لو ۳ = مع لو ۲ زلا = مع [لا مع لو زلا − مع لا لو زلا] زلا

اسواسطے کلی بالاجزا کے لینے سے

لو ۳ = لا۲/۲ مع لو زلا − مع لا۲/۲ لو زلا − لا مع لا لو زلا + مع لا۲ لو زلا

= لا۲/۲ مع لو زلا − لا مع لا لو زلا + ۱/۲ مع لا۲ لو زلا

صورت قانونیہ عام یہہ ہے کہ

[ن] لو ن+۱ = لا ن مع لو زلا − ن لا ن−۱ مع لا لو زلا + ن(ن−۱)/(۱.۲) لا ن−۲ مع لا۲ لو زلا − . . . .

(۱۸) ثابت کرو کہ سلسلہ جسکی ن وین رقم $\left(\frac{۱}{ن}\right)^{ب + \frac{ص}{ن}}$ ہے انضمامی ہے اگر ب بڑا بہ نسبت واحد کے ہو اور انفراجی ہے اگر ب بڑا بہ نسبت واحد کے نہو

(۱۹) ثابت کرو کہ سلسلہ جسکی ن وین رقم

$$\frac{ع\,(ع + ط)\,(ع + ۲ط)\,\cdots\,(ع + ن ط)}{و\,(و + ط)\,(و + ۲ط)\,\cdots\,(و + ن ط)}$$

ہی انضمامی ہے اگر و بڑا بہ نسبت ع + ط کے ہو اور انفراجی ہی اگر و بڑا ع + ط سے نہو

(۲۰) فرض کرو کہ سلسلہ کی (ن + ۱) وین رقم ن وین رقم سے نسبت

$$\frac{ن^{ع} + ا\,ن^{ع-۱} + ب\,ن^{ع-۲} + \cdots}{ن^{ع} + ط\,ن^{ع-۱} + ص\,ن^{ع-۲} + \cdots}$$

کی رکھتی ہے جہاں ع ثابت صحیح عدد ہے اور ا اور ب . . . ط و ص . . . مقادیر مستقل ہیں ثابت کرو کہ سلسلہ انضمامی ہے اگر ط بڑا بہ نسبت ا + ۱ کے ہو اور انفراجی ہے اگر ط بڑا بہ نسبت ا + ۱ کے نہو

(۲۱) فرض کرو کہ ا = مع لو^۲ زلا اور ب = مع لوہو زلا اور س = مع ہو^۲ زلا اور فرض کرو کہ کلی کی حدود غائی تینون کلیون مین ایک ہی تو ثابت کرو کہ اس کبھی چھوٹا ب^۲ سے نہین ہوگا

[ہر ایک کلی کو ایک خاص مجموعہ کی حد غائی سمجھو تو یہہ مثال موقوف اس مسئلہ جبریہ پر ہو جائیگی کہ

$$(ط_۱^۲ + ط_۲^۲ + \cdots + ط_ن^۲)\,(س_۱^۲ + س_۲^۲ + \cdots + س_ن^۲)$$

کبھی کم

$$(ط_۱ س_۱ + ط_۲ س_۲ + \cdots + ط_ن س_ن)^۲$$

سے نہین ہوتا]

باب پنجم

کلی ثناۃ

(۵۶) فرض کرو کہ مج (لا) جملہ لا کا ہے تو ہم لکہہ آئی ہین کہ مج (لا) کی کلی ایسی ایک مقدار

تو ہوگی کہ زلو/زلد = مح (لد) کلی کو ہم ایک خاص حاصل جمع کی جہ معانی بہی خیال کرسکتے ہین
(دفعات ۲ — ۶) دیکھو اور یہی سبب ہوا ہی کہ رمز مع مح (لد) زلد سے کلی تعبیر ہوتی ہے
اب کلی کی تصورات کی توسیع اون صورتون مین کرتے ہین کہ جنمین ایک سے زیادہ مقدار متغیرہ ہوتی ہین
(۵۷) فرضکرو کہ ہمکو لو کی قیمت ایسے دریافت کرنی ہی کہ جو شرائط مساوات ز۲لو/زی زلد = مح (لد ی)
کو پورا کرین اسمین مح (لد ی) جملہ دو مقدار غیر متغیرہ بے تعلق لد اور ی کا ہی مساوات کو اسطرح لکہہ سکتی ہین

ز/زی (زلو/زلد) = مح (لد ی)

یا ز۲لو/زی زلد = مح (لد ی)

اگر مو = زلو/زلد پس مو کا ایسا جملہ ہونا ضروری ہی کہ اگر اوس جملہ سے جزوی بلحاظ ی کے
لد کو مقدار مستقل خیال کرکے لین تو مح (لد ی) حاصل ہوا سواسطے ہم لکہہ سکتے ہین کہ

مو = مع مح (لد ی) زی

یعنی زلو/زلد = مع مح (لد ی) زی

اسے معلوم ہوا کہ لو کا ایسا جملہ ہونا ضروری ہے کہ اوسکا سر جزوی بلحاظ لد کے ی کو مقدار
مستقل خیال کرکے لین تو جو نتیجہ مین جملہ حاصل ہو وہ مع مح (لد ی) زی سے تعبیر ہوا ہے معلوم ہوا کہ

لو = مع [مع مح (لد ی) زی] زلد

پس ترکیب لو کے حاصل کرنیکی یون بیان ہوسکتی ہے کہ اول مح (لد ی) کی کلی بلحاظ ی کی اور جو حاصل
ہو اوسکی کلی بلحاظ لد کے لو

اوپر کی صورت بیانیہ ٹہیک اسطرح لکہی جاتی ہے

مع مع مح (لد ی) زی زلد یا مع مع مح (لد ی) زلد زی

اس طریقہ کتابت پر کل مصنفین کا اتفاق نہین ہی مختلف مصنف مختلف طرح سی اسکو
لکہتے ہین ہم نے اس کتاب مین دوسری صورت کو اختیار کیا ہی یعنی دو رموز زلد اور زی مین سے
زی کو بائین طرف اوس حالت مین لکہینگے کہ کلی بلحاظ ی کے پہلے اوس کلی سے لین جو بلحاظ

لا کے لحاظ اور اسکے بالعکس ہے

(۵۸) ہم کو اسطرح بہی دریافت کرسکتے ہین کہ اول بلحاظ لا کے اور پہر بلحاظ د کے کلی لیوین اس عمل کو اس مساوات سے تعبیر کرتے ہین

لو = مع مع مح (لا، ی) زی زلا

(۵۹) چونکہ دو ترکیبون سے لو اس مساوات ز۲لو/زلا زی = مح (لا، ی) سے حاصل ہوتا ہے اسلئے ضرور ہے کہ ہم تحقیقات اس بات کی کرین کہ ایک نتیجہ سے زیادہ نتیجے تو نہین حاصل ہوتے فرض کرو کہ لو۱ اور لو۲ دو قیمتین ایسی ہین کہ ہر ایک مساوات معلوم کی شرائط کو پورا کرتی ہی تو

ز۲لو۱/زلا زی = مح (لا، ی) اور ز۲لو۲/زلا زی = مح (لا، ی)

تفریق کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ز۲لو۱/زلا زی − ز۲لو۲/زلا زی = ۰

یعنی ز/زلا (زمو/زی) = ۰ اسمین مو = لو۱ − لو۲

اب مساوات زمو/زلا = ۰ سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہین کہ می ایک مقدار مستقل ہو یعنے مقدار مستقل وہانتک ہو جہانتک کہ اوسکو لا سے علاقہ ہو یا یون کہو کہ می جملہ لا کا نہو مگر وہ کسی اور مقدار متغیر کا جملہ ہوسکتا ہی جو سوال مین واقع ہو پس مساوات

ز/زلا (زمو/زی) = ۰ ہم یہہ نتیجہ نکالتے ہین کہ زمو/زی ایک جملہ لا کا نہین ہوسکتا بلکہ وہ ایک جملہ اختیاری ی کا ہوسکتا ہی پس اب ہم اسکو اسطرح لکھتے ہین کہ

زمو/زی = ح (ی)

کلی نکالنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

مو = مع ح (ی) زی + مقدار مستقل

یہان مقدار مستقل جسے ہم کہہ رہے ہین اوسمین ی نہونا چاہیے بلکہ اوسمین لا ہوگا اسکو صر (لا) سے تعبیر کرتے ہین اور مع ح (ی) زی کو صح (ی) سے تعبیر کرتے ہین پس اجر کا

ھ م+۱ [ک ۱ مج (لا م و س) + ک ۲ مج (لا م و س۱) + ک ۳ مج (لا م و س۲) ... + ک م مج (لا م و س م)

سلسلہ کی حد غائی جو درمیان خطوط و حدانی کے واقع ہی او سکا التمین کیہ ک ۱ و ک ۲ ... ک م

غیر محدود کم ہوں بموجب دفعہ ۳۳ کے یہہ ہے کہ

صع سع مج (لا م و ی) ز ی

چونکہ یہہ حد غائی سلسلہ کی ہی اسلیئے ہم خود سلسلہ کو یہہ فرض کر سکتے ہین کہ

صع سع مج (لا م و ی) ز ی + ق م+۱

اسمین ق م+۱ اخر کار معدوم ہوتا ہے

فرض کرو کہ صع سع مج (لا م و ی) ز ی ھج (لا م) سے تعبیر ہوتا ہے پس تمام

سطور افقی کو جمع کرو تو یہہ نتیجہ حاصل ہوگا جسکو ہم اسطرح تعبیر کرتے ہین

حج ھ ھج (لا) + حج ھ ق

اب ہر باب رقم کو جسکا انموذج ھ ہے کم کرو تو حج ھ ق معدوم ہوگا اور اخر کو ہمکو یہہ حاصل ہوگا

صلع طع ھج (لا) ز لا

یعنی صلع طع [سع صع مج (لا ی) ز ی] ز لا

اور اسکو زیادہ ٹہیک اسطرح لکھتے ہین کہ

صع طع سع صع مج (لا و ی) ز لا ز ی

ز ی کو بائین طرف ز لا کے لکھا ہی کیونکہ کلی اول بلحاظ ی کے لی ہے

(۶۱) اب ہم طالب علموں کو یہہ بات پہر یاد دلائی دیتے ہین کہ ان تینوں طریقہ کتابت مین مصنفین کا

اختلاف ہی کوئی کسی طرح لکھتا ہی کوئی کسیطرح طع صع سع مج (لا و ی) ز لا ز ی سے

ہماری مراد ان اعمال سے ہی کہ مج (لا و ی) کی کلی بلحاظ ی کے درمیان حدود غائی س اور ص کے

لیگئی ہے اور پہر ماحصل کی کلی بلحاظ لا کے درمیان حدود غائی ط اور ص کے لیگئی ہے بعض

مصنفین انہین اعمال کی ترتیب کو اسطرح تعبیر کرینگے کہ صع طع صع سع مج (لا و ی) ز ی ز لا

(۶۲) دفعہ ۶۰ مین حاصل جمع کی حد غائی اسطرح بہی دریافت ہو سکتی تہی کہ اول ہم تمام رقمون کا ایک عمودی سطر کی بینیہ اور پہر تمام عمودی سطرون کا حساب نکالتے اسطرح سے ہمکو یہہ مجموعہ حاصل ہوتا کہ سنتہ طے مع صح (لا و ی) ز ی ز لا = طے مع صح (لا و ی) ز لا ز ی

ان دونو صورتون کی تطبیق دفعہ ۵۹ کی استعانت سے بیان ہو سکتی ہے جسکو اب ہم ثابت کرینگے فرض کرو کہ ح (لا و ی) سے کلی صح (لا و ی) بلحاظ ی کے لا کو مستقل خیال کر کے اور ح (لا و ی) سے کلی ح (لا و ی) بلحاظ لا کے ی کو مقدار مستقل خیال کر کے تعبیر کرتے ہین تو

طے مع سنتہ مع صح (لا و ی) ز لا ز ی = طے مع [ح (لا و صہ) – ح (لا و سہ)] ز لا

= طے مع ح (لا و صہ) ز لا – طے مع ح (لا و سہ) ز لا

= ح (ص و صہ) – ح (ط و صہ) – ح (ص و سہ) + ح (ط و سہ) . . . (۱)

اب اول صح (لا و ی) کی کلی بلحاظ لا کی ی کو مقدار مستقل مقرر کر کے لو اور یا حاصل کی کلی بلحاظ ی کے لا کو مقدار مستقل مقرر کر کے لو اور جو نتیجہ اخر کو حاصل ہو اوسے ح (لا و ی) سے تعبیر کرو تو یہہ حاصل ہو گا

سنتہ مع طے مع صح (لا و ی) ز ی ز لا = ح (ص و صہ) – ح (ص و سہ) – ح (ط و صہ) + ح (ط و سہ) . . . (۲)

لیکن بموجب دفعہ ۵۹ کے

ح (لا و ی) = ح (لا و ی) + صح (ی) + ھر (لا)

اسمین صح (ی) کوئی جملہ ی کا بغیر لا کے اور ھر (لا) جملہ لا کا بغیر ی کے ہے اب (۳) کے استعمال سے بائین طرف کا رکن (۲) کا استحالہ (۱) کی بائین طرف کے رکن کیطرف ہو سکتا ہے

(۶۳) اب تک ہم نے کلی سے بلحاظ لا اور ی کے مستقل حدود غائی کے درمیان نکالی ہے لیکن اس دو دفعہ کلی لینے کے استعمال مین حدود غائی اول کلی کی اکثر جملے اور مقادیر متغیر کے ہوتے ہین مثلاً رمز طے مع ھر(لا) مع صح(لا) صح (لا و ی) ز لا ز ی سے یہہ اعمال تعبیر ہوتے ہین کہ اول کلی بلحاظ ی کے لا کو مستقل خیال کر کے لو اور فرض کرو کہ کلی ح (لا و ی) حاصل ہوئی اور پہر حدود غائی معین کے درمیان کلی لو تو یہہ نتیجہ حاصل ہو گا

ح [لا و صح (لا)] – ح (لا و ھر لا)

(دلیل)

تو آخر کار ہمکو وہ کلی حاصل ہوگی جو

طبع [ح [لا و ھیح (لا)] — ح [لا و ھر (لا)]] زلا

سے تعبیر ہوگی

دفعہ ۶۰ مین جو ترکیب تجمیع لکھی ہے اوسمین صرف یہہ فرق ہے کہ مقادیر

سہ و ک ، د ک ۲ ۰۰۰ ک م-۱ کی یعنی ہر سطر افقی مین ایک نہین ہوتا مثلاً

(مر + ۱) وین سطر مین یعنی

ک مر+۱ ح (لا مر و سہ) + ک ۲ ھیح (لا مر و ک ۱) + ک ۳ ھیح (لا مر و ک ۲) ۰۰۰ + ک م ھیح (لا مر و ک م-۱)

مین ہم سہ کو بجای ھر (لا مر) کے خیال کرتے ہین اور د ۱ و د ۲ ۰۰۰ ایک سلسلہ مقادیر ایسا ہے کہ

ھر (لا مر) و ک ۱ و ک ۲ ۰۰۰ ک م-۱ و ھیح (لا مر) بترتیب مقادیر ہین اور دو متصل کی رقمون کے

درمیان تفاوت آخر کار معدوم ہوجاتا ہے پس عمل موافق سابق کے عمل کرنے سے ہمکو

حاصل جمع (ر + ۱) وین سطر کی رقمون کی حد غائی کے لئے ھیح (لا) مع ھیح (لا مر و ی) زی ھر (لا مر)

حاصل ہوتا ہے

(۶۴) یہہ کچھ ضرور نہین کہ سطور افقی مین سے ہر ایک سطر افقی مین تعداد ارقام کی ایک ہی مقرر کیجائے

دلیل اسکی یہہ ہے کہ م آخر کار غیر محدود زیادہ ہوتا ہے اسلئے (ر + ۱) وین سطر کی حد غائی

کی صورت بیانیہ ایک ہی ہوتی ہی خواہ کسی تعداد ارقام سے ہم عمل شروع کرین

(۶۵) اول کلی مین جب حدود غائی چلے اور مقدار متغیر کے ہوتی ہین تو ہم کلیان مختلف ترتیب سے

مثل دفعہ ۳ ۱ کے بغیر خاص تحقیقات تشخیص حدود غائی کے نہین لے سکتے اس سلسلہ کو آئندہ

باب مین بیان کرینگے

(۶۶) ہمنے جو تعریف کلی ثناۃ بیان کی ہی اوسے یہہ نتیجہ جب اخذ ہوتا ہی کہ دونو کلیون

کی حدود غائی مستقل ہون کہ

مع مع ھیح (لا) ھیح (ی) زلا زی = مع ھیح (لا) زلا × مع ھیح (ی) زی

ف ا سے بہیں ہوگا

مثال ۲۱ باب چہارم کے اخیر میں دیکھو

(۱۳) اگر ضَ مع مح (ے) رسے برابر واسکے ہی اور مح (ے) ہمیشہ مثبت ہی تو ثابت کرو کہ

ضَ مع مح (ے) حم س ے رے) + ضَ مع مح (ے) حا س ے رے) چھوٹا واحد سے ہے

(۱۴) اگر ضَ مع مح (ے) رے برابر واحد کے ہے اور مح (ے) ہمیشہ مثبت ہی تو ثابت کرو کہ

ضَ مع ے مح (ے) رے ۔ (ضَ مع ے مح (ے) رے)^2 مثبت ہے

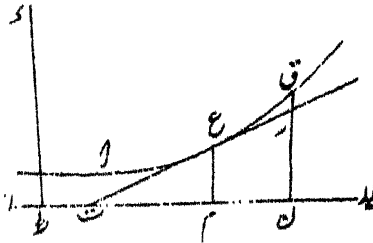
باب ششم

خطوط منحنی کا طول

مستوی قائم الزاویہ محددین

(۶۸) فرض کرو کہ ع ایک نقطہ خط منحنی ا ع ق میں ہے اور لد اور ی اوسکے محددین ہیں اور صو طول قوس ا ع کا ہے اور اوسکا انداز نقطہ معین ا سے ع کی طرف ہوتا ہے

تو بموجب دفعہ ۲۰۷ علم حساب الجزئیات کے

$$\frac{رصو}{رلد} = \sqrt{1 + \left(\frac{ری}{رلد}\right)^2}$$

اسے معلوم ہوا کہ صو = مع $\sqrt{1 + \left(\frac{ری}{رلد}\right)^2}$

مساوات خط منحنی سے ہم $\frac{ری}{رلد}$ کی قیمت ارقام لد میں دریافت کر کے اسمیں مندرج کریں اور پھر کلی لیں تو صو معلوم ہو جائیگا

(۶۹) کسی خط منحنی کے طول دریافت کرنے کو استقامت انحناء کہتے ہیں کیونکہ اوسکے طول دریافت کرنے میں یہہ اشکال پیش ہوتا ہے کہ ایک خط مستقیم ایسا دریافت کرو جسکا طول برابر خط منحنی کے حصہ معین کے ہو دفعہ گذشتہ میں ہم نے ثابت کیا ہی کہ طول قوس خط منحنی کا معلوم ہو جاتا ہی اگر ایک خاص کلی معلوم ہو مگر یہہ ہو سکتا ہی کہ بعض صورتیں ایسی واقع ہوں کہ اونمیں یہہ کلی نہ تشخیص ہو سکے جب طول قوس خط منحنی کیسی ایک یا دو نومعہ دین طرف توس ہن بیان ہو سکے توہم کہا کرتے ہیں کہ خط منحنی قابلیت استقامت کی رکھتا ہے

(۷۰) قرب البیضوی کے قوس کے معلوم کرنے میں اوپر کی دفعہ کو کام میں لاؤ

مساوات قرب البیضوی کی $ی = \sqrt{۴ ط لا}$ اسے معلوم ہوا کہ

$$\frac{زی}{زلا} = \sqrt{\frac{ط}{لا}} \text{ اور } \frac{زصو}{زلا} = \sqrt{\frac{لا + ط}{لا}}$$

پس $صو = مع \sqrt{\frac{لا + ط}{لا}}\, زلا$ مثال ۲ صفحہ ۱۸ دیکھو

$$= \sqrt{ط لا + لا^۲} + ط لوگ \left[\sqrt{لا} + \sqrt{ط + لا}\right] + س$$

یہاں س کوئی مقدار مستقل ہے یعنی کوئی مقدار ایسی ہی کہ وہ لا پر موقوف نہیں ہے اوسکی قیمت موقوف اوس نقطہ معین پر ہے جسے کہ قوس کا طول اندازہ ہوا ہے اگر ہم راس سے قوس کا طول اندازہ کریں تو صو معدوم لا کے ساتھہ ہو جاتا ہی اسے معلوم ہوا کہ س کی دریافت کرنیکے واسطے یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

$$ط لوگ \sqrt{ط} + س = ۰$$

$$پس\ صو = \sqrt{ط لا + لا^۲} + ط لوگ \left[\sqrt{لا} + \sqrt{ط + لا}\right] - ط لوگ \sqrt{ط}$$

$$= \sqrt{ط لا + لا^۲} + ط لوگ \frac{\sqrt{لا} + \sqrt{ط + لا}}{\sqrt{ط}}$$

پس اگر ہمکو طول کسی خط منحنی کا راس سے ناپا گیا کسی نقطہ تک جسکا محدد معین ہو دریافت کرنا مطلوب ہو تو لا کی جگہہ صرف محدد معینہ کو آخر صورت بیانیہ میں رکھہ دو مثلاً عرض مستقیم کے طرف پر لا = ط اسے معلوم ہوا کہ طول قوس کا راس اور عرض مستقیم کے ایک طرف کے درمیان

$$ط \sqrt{۲} + ط لوگ (۱ + \sqrt{۲})$$ ہے

(۷۱) دفعہ بالا میں ہم نے قیمت مقدار مستقل س کی دریافت کی ہی لیکن جہاں خطوط منحنی کے حصص معینہ کا

طول دریافت کرنا ہوتا ہے وہان اوسکی دریافت کرنیکی ضرورت نہین اسواسطے کہ فرض کرو کہ طول قوس کا اوس نقطے سے جسکا محدد لا۱ ہے اوس نقطہ تک جسکا محدد لا۲ ہے دریافت کرنا منظور ہے

فرضکرو کہ ھج (لا) کلی $\sqrt{[1 + (\frac{زی}{زلا})^2]}$ کی ہے اور صو۱ اور صو۲ خط منحنی کے قوسون کے طول مین جو نقطہ معین سے اون نقاط تک جنکے محدد لا۱ اور لا۲ مین اندازہ کئے گئے ہین

تو صو۲ — صو۱ طول مطلوب ہوگا پس

$$صو = مع \sqrt{[1 + (\frac{زی}{زلا})^2]}\ زلا = ھج\ (لا) + س$$

اسے معلوم ہوا کہ صو۱ = ھج (لا۱) + س اور صو۲ = ھج (لا۲) + س

اسواسطے صو۲ — صو۱ = ھج (لا۲) — ھج (لا۱)

اسے معلوم ہوا کہ طول مطلوب کے دریافت کرنیکے واسطے لا۱ اور لا۲ کو متواتر لا کی جگہہ ھج (لا) مین رکھین اور اول ماحصل کو دوسری ماحصل مین سے تفریق کرین اسواسطے مقدار مستقل س کی دریافت کرنیکی کچھہ ضرورت نہین نفس الامر مین ماحصل اسطرح لکھا جا سکتا ہی کہ

$$صو_2 — صو_1 = {}^{لا_2}_{لا_1}مع \sqrt{[1 + (\frac{زی}{زلا})^2]}\ زلا$$

(۷۲) خط تدویر کے قوس کا طول دریافت کرو

خط تدویر مین اگر مبدء راس ہو اور محور ی کا مماس اوس نقطہ پر ہو تو بموجب دفعہ ۲۰۸ علم حساب الجبر بیانے کے

$$\frac{زصو}{زلا} = \sqrt{(\frac{۲ط}{لا})}$$

$$اسواسطے\ صو = \sqrt{(۸\ ط\ لا)} + س$$

مقدار مستقل صفر ہوگی اگر قوس کی پیمائش راس سے کی جاے

بالعکس اسکے اگر صو = $\sqrt{(۸\ ط\ لا)}$ + س ہین تو اسسے ہم یہہ نتیجہ نکالتے ہین کہ خط منحنی خط تدویر ہے

اور علی العموم اگر یہہ ہو کہ

$$صو + ا = \sqrt{(ب + س_1\ لا + س_2\ ی)}$$

اسمین ا و ب و س۱ اور س۲ مقادیر مستقل ہین تو ہم یہہ نتیجہ نکالتے ہین کہ خط منحنی خط تدویر ہے

اسواسطے کہ مبدا اور محوروں کے مناسب تبدلات سی اخر ساوات اس صورت مین کرسکتی ہین کہ

$$\text{صو} = \sqrt{(8\,\text{ط}\,\text{لا})} + \text{س}$$

(۱۳) خط مُجّل کے قوس کا طول دریافت کرو

ساوات خط مجل کی $\text{ی} = \frac{\text{س}}{2}\left(\text{ی}^{\frac{\text{لا}}{\text{س}}} + \text{ی}^{-\frac{\text{لا}}{\text{س}}}\right)$ اسے معلوم ہوا کہ

$$\frac{\text{زی}}{\text{زلا}} = \frac{1}{2}\left(\text{ی}^{\frac{\text{لا}}{\text{س}}} - \text{ی}^{-\frac{\text{لا}}{\text{س}}}\right) \text{ اور } \frac{\text{زصو}}{\text{زلا}} = \frac{1}{2}\left(\text{ی}^{\frac{\text{لا}}{\text{س}}} + \text{ی}^{-\frac{\text{لا}}{\text{س}}}\right)$$

$$\text{پس صو} = \frac{1}{2}\,\text{مع}\left(\text{ی}^{\frac{\text{لا}}{\text{س}}} + \text{ی}^{-\frac{\text{لا}}{\text{س}}}\right)\text{زلا} = \frac{\text{س}}{2}\left(\text{ی}^{\frac{\text{لا}}{\text{س}}} - \text{ی}^{-\frac{\text{لا}}{\text{س}}}\right) + \text{س}$$

مقدار مستقل صفر ہوگی اگر قوس صو کو نقطہ لا = ۰ سے پیمایش کرین

(۷۴) خط منحنی جسکی ساوات معلوم

$$\text{لا}^{\frac{2}{3}} + \text{ی}^{\frac{2}{3}} = \text{ط}^{\frac{2}{3}}$$

ہی اوسکی قوس دریافت کرو

$$\text{یہان } \frac{\text{زی}}{\text{زلا}} = -\frac{\text{ی}^{\frac{1}{3}}}{\text{لا}^{\frac{1}{3}}} \text{ اور } \frac{\text{زصو}}{\text{زلا}} = \left(\frac{\text{لا}^{\frac{2}{3}} + \text{ی}^{\frac{2}{3}}}{\text{لا}^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\text{ط}^{\frac{1}{3}}}{\text{لا}^{\frac{1}{3}}}$$

$$\text{پس صو} = \text{ط}^{\frac{1}{3}}\,\text{مع}\,\frac{\text{زلا}}{\text{لا}^{\frac{1}{3}}} = \frac{3\,\text{ط}^{\frac{1}{3}}\,\text{لا}^{\frac{2}{3}}}{2} + \text{س}$$

مقدار مستقل صفر ہوگی اگر قوس کی پیمایش نقطہ لا = ۰ سے کرین خط منحنی تدویر مدیر ہے دایرہ متحرک کا نصف قطر ایک چوتہائی دایرہ ساکن کے نصف قطر سے ہے (علم حساب الجزئیات کی دفعہ ۳۶۰ دیکھو اور $\text{ص} = \frac{\text{ط}}{4}$ کے رکہو)

(۷۵) جس طرح نتیجہ دفعہ ۶۸ مین حاصل ہوا ہے اوس طرح ہم ثابت کرسکتے ہین کہ

$$\text{صو} = \text{مع}\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\text{زلا}}{\text{زی}}\right)^2\right]}\,\text{زی}$$

یا ہم اس نتیجہ کو پہلے نتیجے سے اسطرح اخذ کرین کہ

$$\text{مع}\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\text{زی}}{\text{زلا}}\right)^2\right]}\,\text{زلا} = \text{مع}\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\text{زی}}{\text{زلا}}\right)^2\right]}\,\frac{\text{زلا}}{\text{زی}}\,\text{زی}$$

$$= \text{مع}\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\text{زلا}}{\text{زی}}\right)^2\right]}\,\text{زی}$$

ساوات خط منحنی سے ہم $\frac{\text{زلا}}{\text{زی}}$ کو ارقام ی مین بیان کرسکتے ہین اور پہر کل لینے سے صو کو

$$\frac{\text{زصو}}{\text{زبر}} = \text{ط} \; ۲ \sqrt{\text{ر}^۲ + ۲ \, \text{جم بر}}$$

اور برابر ۲ ط جم $\frac{\text{بر}}{۲}$ کے نہ ہونا چاہیئے بلکہ ± ۲ط جم $\frac{\text{بر}}{۲}$ کے ہونا چاہیئے اور مناسب علامت
اس صورت قانونیہ کی استعمال مین مقرر ہو سکتی ہے اب ہم صو سے ایک مثبت مقدار سمجھتی ہین
اور ہم صو کو اسطرح پیمائش کر سکتے ہین کہ وہ بر کے ساتھہ زیادہ ہو پس $\frac{\text{زصو}}{\text{زبر}}$ بہی مثبت ہی اسسے
معلوم ہوا کہ جس حالت مین کہ جم $\frac{\text{بر}}{۲}$ مثبت ہے تو ہمکو اوپر کی علامت لینی چاہیے اور
$\frac{\text{زصو}}{\text{زبر}}$ = ۴ ط جم $\frac{\text{بر}}{۲}$ کے لکہنا چاہیئے اور جس حالت مین کہ جم $\frac{\text{بر}}{۲}$ منفی ہو تو نیچے کی علامت لکہنی چاہیے
اور $\frac{\text{زصو}}{\text{زبر}}$ = −۴ ط جم $\frac{\text{بر}}{۲}$ کے لکہنا چاہیئے اسسے معلوم ہوا کہ طول کل احاطہ کا ۴ط مع جم $\frac{\text{بر}}{۲}$ زبر
نہین ہے بلکہ ۲×۴ط مع جم $\frac{\text{بر}}{۲}$ زبر − ۲×۴ مع جم $\frac{\text{بر}}{۲}$ زبر یعنی ۸ط ہے یہہ نتیجہ اب ایسا ہی جلسے نکلنے کی
پہلے ہی سے ہمکو توقع تہی اسواسطے کہ شکل کے قرینہ سی یہہ معلوم ہوتا تہا کہ طول کل احاطہ کا دو چند
اوس حصہ سے تہا جو خط ابتدائی کے ایک جانب مین واقع ہی اور اس طول کا ۴ط ہونا دفعہ بالا مین
ثابت ہو چکا ہے

(۸۳) بعض اوقات نہایت آسانی سی طول خط منحنی کا اس صورت قانونیہ سے مستنبط ہوتا ہی کہ

$$\text{صو} = \text{مع} \sqrt{\left[\text{ن}^۲ \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زن}}\right)^۲ + ۱\right]} \; \text{زن}$$

اور یہہ دفعہ ۶۷ سے بلاواسطہ استخراج ہوتا ہے

(۸۴) لوکارثمی خط پیچان کا طول دریافت کرو

مساوات اس خط منحنی کی یہہ ہے کہ ن = ص ط یا ن = ص ی اگر ہم ط = ی کے فرض کرین
تو بر = س لوک $\frac{\text{ن}}{\text{ص}}$ اسواسطے $\frac{\text{زبر}}{\text{زن}} = \frac{\text{س}}{\text{ن}}$ اور

$$\text{صو} = \text{مع} \sqrt{(۱ + \text{س}^۲)} \; \text{زن} = \sqrt{(۱ + \text{س}^۲)} \; \text{ن} + \text{س}$$

پس خط منحنی کے حصون کا طول جنکے اطراف کے ن۱ اور ن۲ نصف قطر دائرہ ہین یہہ ہے

$$\text{مع}_{\text{ن}_۱}^{\text{ن}_۲} \sqrt{(۱ + \text{س}^۲)} \; \text{زن} \quad \text{یعنی} \quad \sqrt{(۱ + \text{س}^۲)} \; (\text{ن}_۲ - \text{ن}_۱)$$

نصف قطر دائرہ اور اوسکے مطابق جو مماس خط منحنی کے کسی نقطہ سے نکالا جاے ان دونو کے

درمیان کا زاویہ بحکم دفعہ ۱۹۴ علم حساب الجزئیات کے مستقل ہی اگر اس زاویہ کو سہ سی تعبیر کریں تو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ س = مس سہ پس جذر (۱ + مس۲ سہ) = قطا سہ اسواسطے زصو/زبو = قطا سہ اور صو = بو قطا سہ + ک

اسسے معلوم ہوا کہ (بو۲ − بو۱) قطا سہ طول حصہ مذکور کا ہی

صور قانونیہ جنمین کہ نصف قطر دائرا اور عمود ملتف ہین

(۸۵) اگر خط منحنی کے کسی نقطہ کے نصف قطر دائرا اور مماس کے درمیان کا زاویہ سہ ہو تو جم سہ = زبو/زصو

(دفعہ ۱۰ علم حساب الجزئیات) فرض کرو کہ قطب سے جو اسی مماس پر عمود نکالا جاوی وہ ع ہو تو

جب سہ = ع/بو اسواسطے جم سہ = جذر(بو۲ − ع۲)/بو

پس زبو/زصو = جذر(بو۲ − ع۲)/بو

اسواسطے زصو/زبو = بو/جذر(بو۲ − ع۲) اور صو = مع بو زبو/جذر(بو۲ − ع۲)

(۸۶) تدویر مدیر خارجی

دفعہ ۲۳۶ علم حساب الجزئیات کے طریقہ کتابت اور شکل کو اختیار کریں تو یہہ ثابت ہو سکتا ہے

مساوات مماس تدویر مدیر خارجی کا نقطہ ع پر یہہ ہے کہ

ی̄ − ی = − (جم بر − جم (ط + ص)بر/ص) / (جب بر − جب (ط + ص)بر/ص) (لا̄ − لا)

اسمین لا اور ی محددین نقطہ ع اور لا̄ اور ی̄ محددین متغیر ہین اسسے معلوم ہوا کہ عمود ع جو مماس پر نقطہ ع سے نکالا جاوے یہہ ہے

ع = (ط + ۲ص) جب طبر/۲ص

اور نیز بو۲ = ط۲ + ۴ص (ط + ص) جب۲ طبر/۲ص

پس ع۲ = س۲ (بو۲ − ط۲)/(س۲ − ط۲) اسمین س = ط + ۲ص

اسسے معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۸۵ کے

صو = جذر(س۲ − ط۲)/ط مع بو زبو/جذر(س۲ − بو۲) = جذر(س۲ − ط۲)/ط جذر(س۲ − بو۲) + ک

قرن پر بو = ط اور راس پر بو = س پس طول حصہ خط منحنی کا قرن اور متصل کے راس کے درمیان یہہ ہے

اسواسطے $\text{صو} = -\frac{\sqrt{\text{س}^2 - \text{ط}^2}}{\text{ط}}$ مع $\frac{\text{ن ر ن}}{\sqrt{(\text{س}^2 - \text{ن}^2)}} = \frac{\sqrt{\text{س}^2 - \text{ط}^2}}{\text{ط}} \sqrt{\text{س}^2 - \text{ط}^2}$

یہان مقدار مستقل کی کچھہ ضرورت نہین کیونکہ وہ اوس نقطہ سے شروع ہوتا ہی جسپر نق = س صورت قانونیہ صو کی ان قیمتون پر حاوی ہے کہ جو چھوٹی $\frac{\text{۴ ص (ط+ص)}}{\text{ط}}$ سے ہین

اور اسپر بہی غور کرنی چاہیے کہ

$$\text{صو} = \frac{\sqrt{\text{س}^2 - \text{ط}^2}}{\text{ط}} \sqrt{(\text{ن}^2 - \text{ع}^2)}$$

(۸۹) علیٰ ہذا القیاس تدویر مدیر داخلی مین ثابت ہوسکتا ہی کہ

$$\text{ع}^2 = \frac{\text{س}^2 (\text{ط}^2 - \text{ن}^2)}{\text{ط}^2 - \text{س}^2}$$ اسمین س = ط − ۲ ص

فرض کرو کہ س ع چھوٹا ط سے ہو تو ہم ثابت کرسکتے ہین کہ

$$\frac{\text{رصو}}{\text{رنق}} = \pm \frac{\sqrt{(\text{ط}^2 - \text{س}^2)}}{\text{ط}} \cdot \frac{\text{نق}}{\sqrt{\text{نق}^2 - \text{س}^2}}$$

اور اسیطرح صو دریافت ہوتا ہی طول خط منحنی کا دو قرن متصلہ کے درمیان $\frac{\text{۸ ص (ط − ص)}}{\text{ط}}$ ہے

دوم فرض کرو کہ س ع بڑا ط سے ہے تو ہمکو قیمت $\frac{\text{رصو}}{\text{رنق}}$ کی اسطرح لکھنی چاہیے کہ

$$\frac{\text{رصو}}{\text{رنق}} = \pm \frac{\sqrt{(\text{س}^2 - \text{ط}^2)}}{\text{ط}} \cdot \frac{\text{ن}}{\sqrt{(\text{س}^2 - \text{ن}^2)}}$$

اس حالتمین ص بڑا بہ نسبت ط کے ہے اور طول خط منحنی کا دو قرن متصلہ کے درمیان یہہ دریافت ہوگا کہ

$\frac{\text{۸ ص (ص − ط)}}{\text{ط}}$ ہے

جب کہ ط = ۲ ص تو س = ۰ اور ع = ۰ اس حالت مین تدویر مدیر داخلی ایک خط مستقیم ہوجائیگا اور دائرہ ساکن قطر پر منطبق ہوجائیگا

اگر ط = ص تو س ع = ط کے حاصل ہوتا ہی اس حالتمین نسبتمًا ع کی قیمت مین معدوم ہوتا ہی اور اسے یہہ دریافت ہوتا کہ تدویر مدیر داخلی ایک نقطہ ہوجاتا ہے اور نق = ط

دفعہ ۸۸ کیطرح ثابت ہوتا ہی کہ صو راس سے اوس نقطہ تک کہ متصل قرن کے واقع ہو پیمایش کیا جاے تو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{صو} = \pm \frac{\text{س}^2 - \text{ط}^2}{\text{ط}^2} \sqrt{(\text{ن}^2 - \text{ع}^2)}$$

اگر س بڑہتا ہے ہو تو اوپر کی علامت اور اگر س بڑہتا گہٹتا سے ہو تو نیچی کی علامت لینی چاہیے

صورت قانونیہ جسمین عمود اور اوسکا میلان داخل ہے

(۹۰) ایک اور ترکیب خط منحنی کی طول بیان کرنی کی قابل تحریر ہے

فرض کرو کہ خط منحنی مین ایک نقطہ ع ہی اور لا اور ی اوسکے محددین ہین اور صو طول قوس کا ہے، جو نقطہ معین لہ سے ع تک پیمایش کیجاے ط ی عمود مبدء سے مماس پر کہ نقطہ ع سے کہیجاجاے نکالو اور فرض کرو کہ ط ی = ع اور ع ی = لو اور ی ط لا = بر تو.

$$ع = لا\ جم\ بر + ی\ حب\ بر$$

$$لو = لا\ حب\ بر - ی\ جم\ بر$$

$$\frac{زی}{زلا} = -\ ٹم\ بر \quad اور \quad \frac{زصو}{زلا} = -\ قم\ بر$$

اسواسطے

$$\frac{زع}{زبر} = -\ لا\ حب\ بر + ی\ جم\ بر + جم\ بر\ \frac{زلا}{زبر} + حب\ بر\ \frac{زی}{زبر} = -\ لو$$

$$\frac{ز^2ع}{زبر^2} = -\ \frac{زلو}{زبر} = -\ لا\ جم\ بر - ی\ حب\ بر - حب\ بر\ \frac{زلا}{زبر} + جم\ بر\ \frac{زی}{زبر}$$

$$= -\ ع - قم\ بر\ \frac{زلا}{زبر} = -\ ع + \frac{زصو}{زبر}$$

اسواسطے کلی لینی سے

$$\frac{زع}{زبر} = -\ مع\ ع\ زبر + صو$$

$$اسواسطے\ صو = \frac{زع}{زبر} + مع\ ع\ زبر$$

اور اسکو اسطرح بہی لکہ سکتے ہین کہ

$$صو + لو = مع\ ع\ زبر$$

فرض کرو کہ صو، اور لو، قیمتین صو اور لو کی اوس حالت مین ہین کہ بر کی قیمت بر، ہو اور صو،

اور لو ۲ قیمتین صو اور لو کی اوس صورت مین ہین کہ بر کی قیمت بر ۲ ہو تو

صو ۲ — صو ۱ + لو ۲ — لو ۱ = $\int_{بر_1}^{بر_2}$ ع زبر

ہمنے لو کا اندازہ اوس سمت مین کیا ہی جسمین ع سی چکر لگتا ہے اور اس صورتمین وہ مثبت ہے اور جسکہ لو منفی ہو تو اوسے یہہ معلوم ہو گا کہ ی دوسری جانب مین ع کے ہے

نتائج مذکورہ بالا بہت مطلبون مین کام آتے ہین اونمین سے دو کو ہم لکھتے ہین

(۱) طول حصہ خط منحنی کا جسکی مساوات معلوم ہو تشخیص کرو

اوس مساوات اور $\frac{ی}{ز لا}$ = — مم بر سے ہم لا اور ی کو بر کی ارقام مین دریافت کرتی ہین اور اوسواسطے ع جو برابر لا جم بر + ی جب بر کے ہے دریافت ہو جاتا ہے اور پہر صو اوس مساوات سے معلوم ہوتا ہے کہ

صو = $\frac{ز ع}{ز بر}$ + $\int$ ع زبر

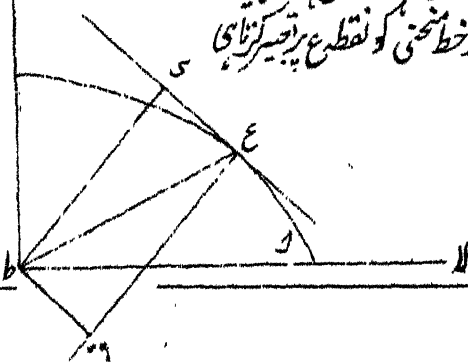
(۲) اوسے ایک خط منحنی ایسا دریافت ہوتا ہی کہ جسکی قوس کی وساطت سی کلی مفروضہ تعبیر ہو سکتی ہے اسواسطے کہ کلی مفروضہ $\int$ ع زبر ہو اسمین ع ایک جملہ بر کا ہی تو خط منحنی مطلوب بر کے ساقط کرنے سے ان مساواتون سے معلوم ہو سکتا ہی

لا = ع جم بر — $\frac{ز ع}{ز بر}$ جب بر اور ی = ع جب بر + $\frac{ز ع}{ز بر}$ جم بر

تو کلی اس طرح تعبیر ہو سکتی ہے کہ صو — $\frac{ز ع}{ز بر}$

یہہ دفعہ ہای مر صاحب کے علم حساب الکلیات کی دفعہ ۱۳۶ کی نقل ہے

(۹۱) دفعہ گذشتہ کے نتائج اسطرح بہی حاصل ہو سکتے ہین

فرض کرو کہ ق نصف قطر انحنا و خط منحنی کو نقطہ ع پر تعبیر کرتا ہی

فرض کرو کہ ع ط = نق اور صو اور لو اور بر کے معنی موافق سابق کے ہون
تو علم حساب الجزئیات کے موافق

ق = زصو / زبر اور ق = ن زن / زع اسواسطے زع / زبر = نق زنق / زصو

اور نیز ع ی = ن حم طا ع ی = — ن زن / زصو

اسواسطے زع / زبر = — ع ی = —لو

فرض کرو کہ ع س نصف قطر انحنا نقطہ ع پر ہے طاق عمود ع س پر نکالو تو مقام النقاط
نقطہ س کا لف خط منحنی ا ع کا ہی اور ق س بلحاظ اس مقام النقاط کے ایسا ہے
جیسا کہ ع ی بلحاظ مقام النقاط ع کے ہی فرض کرو کہ بر اور ع قطبی محددین ق کے
ہین اور ق س = لو تو

بر = بر — ۲/ط اور ع = لو

اور ق س = لو = — زع / زبر = — زع / زبر = — زع / زبر = — زلو / زبر = ز۲ع / زبر۲

اور نیز ق = ع ق + ق س = ع + لو = ع + ز۲ع / زبر۲

لیکن ق = زصو / زبر اسواسطے صو = زع / زبر + ∫ ع زبر

ع ی کی قیمت سی ایک آسان اثبات مسئلہ علم حساب الجزئیات مندرجہ دفعہ ۳۳۹ کا
دریافت کر سکتے ہین فرض کرو کہ ع عمود نقطہ ط سے ہے مقام النقاط ی پر ہے تو موجب
دفعہ ۲۸۴ علم حساب الجزئیات کے

$$\frac{1}{ع^2} = \frac{1}{ع^2} + \frac{1}{ع^4}\left(\frac{زع}{زبر}\right)^2$$

چونکہ ع نصف قطر دائرہ ی کا ہے تو

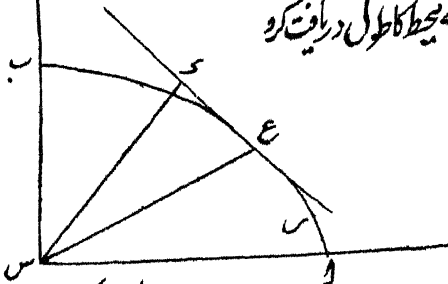
$$\frac{1}{ع^2} = \frac{1}{ع^2} + \frac{لو^2}{ع^4} = \frac{ع^2 + لو^2}{ع^4} = \frac{ن^2}{ع^4}$$

اسواسطے ع = ع۲ / ن

ایک خاص حالت صورت قانونیہ

صو۲ − صو۱ + لو۲ − لو۱ = ∫ بر۲ بر۱ مع ع زبر

کے لکھنے کے قابل ہے فرض کرو کہ کل بیضوی منحنی لین اور کوئی نقطہ اوسمیں نقاط مخصوصہ نہوں تو بر۲ = بر۱ + ۲ ط اور لو۲ = لو۱ تو کل احاطہ خط منحنی کا ∫ بر۱+۲ط بر۱ مع ع زبر ہوگا

(۹۲) بیضوی کے محیط کا طول دریافت کرو

فرض کرو کہ اع ب ربعہ بیضوی ہو اور س ی عمود اوس مماس پر کہ ع سے نکالا جاے اور ا س ی = بر تو ہندسہ بالجبر کی دفعہ ۱۹۶ کے موافق س ی = ط √(ا − ی۲ حا۲ بر)

اسواسطے اع + ع ی = ط مع √(ا − ی۲ حا۲ بر) زبر

مقدار مستقل جو کلی پر زیادہ ہونی چاہئے وہ ایسی فرض کی گئی ہی کہ کلی بر کے ساتھ معدوم ہو جاے

اگر ی نقطہ ایسا ہو کہ زاویہ خارج المرکز ط/۲ − بر ہو تو موجب دفعہ ۸۷ کے

ب س = ط مع √(ا − ی۲ حا۲ بر) زبر

پس اع + ع ی = ب س . . . . . (۱)

اور ع ی = − زع/زبر = − ط ی۲ حا بر جم بر / √(ا − ی۲ حا۲ بر)

فرض کرو کہ ع کا محدد لا ہو تو موجب دفعہ ۹۰ کے

لا = ع جم بر − (زع/زبر) حا بر

= ط √(ا − ی۲ حا۲ بر) جم بر + ط ی۲ حا۲ بر جم بر / √(ا − ی۲ حا۲ بر) = ط جم بر / √(ا − ی۲ حا۲ بر)

پس ع ی = ی۲ لا حا بر اور اگر لاَ محدد س کا ہو تو

لاَ = ط جم (ط/۲ − بر) پس ع ی = ی۲ لا لاَ / ط اور (۱) کو اسطرح لکھہ سکتے ہیں

ب س − اع = (ی۲/ط) لا لاَ . . . . . (۲)

اس نتیجہ کو سنیلا فیگ بینی کہتے ہیں

لا اور لاَ کی قیمتیں جو تحقیق کی گئی ہیں اون سے یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

$$لاَ^۲ = \frac{ط^۲ - ط^۲ جب^۲ بر}{۱ - ی^۲ جب^۲ بر} = \frac{ط^۲ - لا^۲}{۱ - \frac{ی^۲ لا^۲}{ط^۲}}$$

اسواسطے $ی^۲ لا^۲ لاَ^۲ - ط^۲ (لا^۲ + لاَ^۲) + ط^۲ = ۰$

پس مساوات جو لا اور لاَ کو ربط دیتی ہی او نمین مقادیر بالقرینہ واقع ہوتی ہین اُس سے معلوم ہوا کہ

(۲) سے ہم یہہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ

$$\overline{بع} - \overline{ای} = \frac{ی^۲}{ط} لا لاَ$$

یہہ بات شکل سے بہی ظاہر ہے

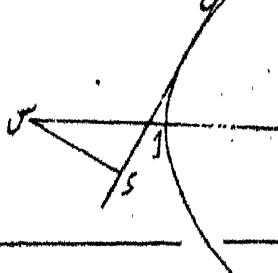
اس بات پر بہی خیال کرو کہ قیمت $\overline{عد}$ کی بیضوی کے مشہور خاصیت ذاتی کی سبب سے بہت سادگی اور آسانی سی نکل آتی ہی اسواسطے کہ فرض کرو $\overline{عج}$ پر جو عمود المماس ہے وہ $\overline{سا}$ سے نقطہ ج پر ملتا ہی اور نقطہ ع سے ایک خط مستقیم متوازی $\overline{سا}$ کا $\overline{سد}$ سے ق پر ملتا ہوا کہینچو

تو ع ق = س ج = $ی^۲$ لا اور بیضوی کی خاصیت کے موافق

$$ع د = ع ق جب بر = ی^۲ لا جب بر$$

(۹۳) بعد البیضوی کے محیط کا طول دریافت کرو

فرض کرو کہ س مرکز اور ا راس ایک بعد البیضوی کا، اور $\overline{سد}$ عمود اوس مماس پر نکالا گیا ہی کہ نقطہ ع مس کہیچا جاے اور زاویہ اس د = بر اور $\overline{سد}$ = ع تو یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ

$$\overline{عد} - \overline{اع} = ط مع \int \sqrt{(۱ - ی^۲ جب^۲ بر)}\, ز بر$$

یہہ اسیطرح سے ثابت ہوسکتا ہی جسطرح کہ اوپر کی دفعہ مین اسی تبدیل کا نتیجہ ثابت ہوا ہی یا تو دفعہ ... کی صورت قانونیہ مین ضروری تبدلات علامت کی جو شکل کی فرق سی پیدا ہون کر دین یا اوس دفعہ کے موافق دوبارہ ابتداء سے شروع کرین مقدار مستقل جو کلی پر زیادہ ہونی چاہئے وہ ایسی فرض کی گئی ہے جو بر کے ساتھہ معدوم ہو

فرض کرو کہ بر کی جو سب سے بڑی قیمت ہوسکی وہ مہ ہے

تو (دفعہ ۲۴۷ علم ہندسہ بالجبر) کے موافق جم س = مہ (ی - ۱)

جب ع غیر متناہی فاصلہ پر حرکت کری تو ع ی - لرع وہ تفاوت ہوجاتا ہی جو ممتنع الملاقات اور قوس بعید البیضویہ مین ہے اور یہہ ممتنع الملاقات مین کہا جاتا ہی اور یہہ قوس نقطہ ا سے اندازہ ہوتی ہے پس یہہ فرق

مع مہ (ا - ی ا - سا بر) زیرہے

طول خطوط منحنی کی سوالات معکوس

(۹۴) ہمنے اوپر کے دفعات مین یہہ بیان کیا ہی کہ خط منحنی معلوم کی قوس کا طول اوسکی طرف متغیر کے محدد کی رقموں مین دریافت ہوتا ہی اب ہم مختصر بیان اوسکی بالعکس کرتے ہین یعنی ایک خط منحنی ایسا دریافت کرتی ہین کہ قوس اوسکی ایک جملہ معلوم اوسکی طرف متغیر کی محدد کا ہو

فرضکرو کہ مج (لد) جملہ معلوم ہے پس صو = مج (لد)

اسواسطے مجَ (لد) = $\frac{زصو}{زلد}$ = مہ $\left[۱ + \left(\frac{زی}{زلد}\right)^۲ \right]^{\frac{۱}{۲}}$

پس $\frac{زی}{زلد}$ = $\left[\left[مجَ (لد) \right]^۲ - ۱ \right]^{\frac{۱}{۲}}$

اور ی = مع $\left[\left[مجَ (لد) \right]^۲ - ۱ \right]^{\frac{۱}{۲}}$ زلد

(۹۵) اوپر کی ترکیب کی مثال یہہ ہی کہ فرض کرو

مج (لد) = مہ (بہ س لد) پس مجَ (لد) = مہ $\frac{س}{لد}$ اسواسطے

ی = مع $\left[\frac{س^۲}{لد^۲} - ۱ \right]^{\frac{۱}{۲}}$ زلد = مع $\frac{(س - لد)\ زلد}{مہ (س لد - لد^۲)}$

$$= \text{مع} \frac{\left(\frac{\text{س}}{۲} - \text{لا}\right) \text{زلا}}{\sqrt{(\text{س لا} - \text{لا}^۲)}} + \frac{\text{س}}{۲} \text{مع} \frac{\text{زلا}}{\sqrt{(\text{س لا} - \text{لا}^۲)}}$$

$$= \sqrt{(\text{س لا} - \text{لا}^۲)} + \frac{\text{س}}{۲} \text{جع}^{-۱} \frac{۲\text{لا}}{\text{س}} + \text{س}$$

اب ی ـ س کی جگہ ی کو لکھہ سکتے ہیں تو اسے معلوم ہوگا کہ خط منحنی خط تدویری ہی (دفعہ ۳۰

(۹۶) ایک اور مثال کی لئے فرض کرو کہ مج (لا) = ط لوک لا تو

$$\text{مجَ} (\text{لا}) = \frac{\text{ط}}{\text{لا}}$$

$$\text{یہاں ی} = \text{مع} \sqrt{\left(\frac{\text{ط}^۲}{\text{لا}^۲} - ۱\right)} \text{زلا} = \frac{(\text{ط}^۲ - \text{لا}^۲) \text{زلا}}{\text{لا} \sqrt{(\text{ط}^۲ - \text{لا}^۲)}}$$

$$= \text{مع} \frac{\text{ط}^۲ \text{زلا}}{\text{لا} \sqrt{(\text{ط}^۲ - \text{لا}^۲)}} - \text{مع} \frac{\text{لا زلا}}{\sqrt{(\text{ط}^۲ - \text{لا}^۲)}}$$

$$= \text{ط لوگ} \frac{\text{لا}}{\text{ط} + \sqrt{(\text{ط}^۲ - \text{لا}^۲)}} + \sqrt{(\text{ط}^۲ - \text{لا}^۲)} + \text{س}$$

لف اور ذی لف

(۹۷) خط منحنی کے طول قوس کو بغیر کلی نکالنے کے ہم اوس صورت میں نکال سکتے ہیں کہ لف خط منحنی کی مساوات معلوم ہو فرضکرو کہ صَو ایک خط منحنی کی قوس کا طول ہی اور ق نصف قطر انحنا اوس نقطہ پر لف کا ہی جو موافق طرف متغیر صَو کے ہے تو علم حساب الجزئیات کی دفعہ ۳۳۱ کے موافق صَو ± ق = ل اسمیں ل مقدار مستقل ہے اگر مساوات لف کی معلوم ہو تو ق نقطہ لف کے محددین کی رقموں میں معلوم ہوسکتا ہی اور پہر یہہ محددین ذی لف کی نقطہ متناظر محددین کی رقموں میں بیان ہوسکتا ہی تو صَو معلوم ہوجائیگا غرض یہہ ترکیب اعمال جزی لینے کے اور استحالہ جبریہ بجائے کلی لینے کے ہوتے ہیں

(۹۸) قریب البیضوی پر دفعہ مذکور کا عمل کرو

قریب البیضوی کی مساوات $\text{ی}^۲ = ۴ \text{ط لا}$ ہے اوسکا لف مقرر کرو فرضکرو کہ لا اور ی محددین اوس نقطہ لف کے ہیں جو مطابق قریب البیضوی کے نقطہ (لا ی) کے ہے تو علم حساب الجزئیات کی دفعہ ۳۴۴ کی معمولی ترکیبوں کے موافق ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہی

$$\text{لاَ} = ۲\text{ط} + ۳\text{لا} \qquad \text{یَ} = -\frac{\text{ی}^۳}{۴\text{ط}^۲}$$

$$\text{اور ق} = ۲\text{ط} \left(\frac{\text{ط} + \text{لا}}{\text{ط}}\right)^{\frac{۳}{۲}}$$

تو مساوات لف کی یہہ حاصل ہوگی

۲۷ ط ی^۲ = ۴ (لاَ − ۳ ط)^۳

اور ق = ۲ ط ((لاَ + ط) / ۳ ط)^{۳/۲}

اسواسطے صو ± ۲ ط ((لاَ + ط) / ۳ ط)^{۳/۲} = ل

فرض کرو کہ ہم صو کو اوس نقطہ سے پیمائش کرین جسپر لاَ = ۳ ط یعنی اوس نقطہ سے جو مطابق راس قرب البیضوی کے ہے تو ہم یہہ دیکھتے ہین کہ لاَ کے ساتھ صو زیادہ ہوتا ہی اسلئے ہمکو اخر مساوات مین اوپرکی علامت لینی چاہئے اور لاَ = ۳ ط اور صو = ۰ کے فرض کرنے سے ل = −۲ ط کے حاصل ہوتا ہے پس

صو = ۲ ط ((لاَ + ط) / ۳ ط)^{۳/۲} − ۲ ط

یہہ قیمت صو کی کلی لینے کے قواعد معمولی سے حاصل ہوتی ہے

(۹۹) خط منحنی کی قوس کا طول جب اوسکی طرف متغیر کی محددین کے رقمون مین معلوم ہوتا ہے تو مساوات لف کی اسقاط کے اعمال معمولی سے دریافت ہوسکتی ہے

اسواسطے کہ بموجب دفعہ ۱۳۳ علم حساب الجزئیات کے

$$\frac{\text{ز لاَ}}{\text{لاَ} - \text{لا}} = \pm \frac{۱}{\text{ق}} \cdot \frac{\text{ز صو}}{\text{ز لاَ}}$$

اسمین حروف جنپر زبر ین لگی ہوئی ہین کسی خط منحنی کے نقطہ سے متعلق ہین اور جن حروف پر زبرین نہیں لگی ہوئی ہین وہ لف کے نقطہ تناظر سے متعلق ہین

لا = لاَ ∓ ق (ز لاَ / ز صو) . . . (۱)

اور علی ہذا القیاس ی = یَ ∓ ق (ز یَ / ز صو) . . . (۲)

پس اگر صو ارقام لاَ یا یَ مین یا دونون مین معلوم ہو تو اس ارتباط اور خط منحنی کی مساوات کی مساوات سے (ز لاَ / ز صو) اور (ز یَ / ز صو) کو دریافت کرسکتے ہین اور ق مساوات صو ∓ ق = ل سے معلوم ہوتا ہے پس اب یہہ باقی رہا کہ لا اور ی کو مساوات (۱) اور (۲) سے اور خط منحنی کی مساوات معلوم سے ساقط کرین اسیطرح سے ایک مساوات لا اور ی کے زلار پر معلوم ہوجائیگی اور یہی مساوات مطلوب لف کی ہوگی

(۱۰) خط محبل پر اوپر کی دفعہ کا عمل کرو

مساوات محبل کی یہہ ہے کہ

$$ی = \frac{س}{۲}\left(ی^{\frac{لا}{س}} + ی^{-\frac{لا}{س}}\right)$$

$$\text{اور}\ صو = \frac{س}{۲}\left(ی^{\frac{لا}{س}} - ی^{-\frac{لا}{س}}\right)$$

فرض کرو کہ صو اوس نقطہ سے پیمایش ہوتا ہے کہ جہان لا = ۰ اور ی = س اب مساوات خط محبل کی لف کی جو اوس نقطہ سے شروع ہوتا ہے جسکی خصوصیت ابہی ہم نے بیان کی ہے دریافت کرتے ہین

اب ہمکو یہہ حاصل ہے کہ

$$\frac{ز ی}{ز لا} = \frac{صو}{س} \qquad \frac{ز صو}{ز لا} = \frac{ی}{س}$$

$$\text{پس} \qquad \frac{ز ی}{ز صو} = \frac{صو}{ی} \qquad \frac{ز لا}{ز صو} = \frac{س}{ی}$$

اور ق = صو مقدار مستقل کی کچہہ ضرورت نہین کیونکہ بموجب فرض ق معدوم صو کے ساتہہ ہوتا ہے اسسے معلوم ہوا کہ دفعہ گذشتہ کی مساواتین (۱) اور (۲) کی یہہ ہو جائینگی

$$لا = لا - \frac{صو\ س}{ی}$$

$$ی = ی - \frac{صو^{۲}}{ی} = \frac{ی^{۲} - صو^{۲}}{ی} = \frac{س^{۲}}{ی}$$

$$\text{اور}\ صو = \sqrt{ی^{۲} - س^{۲}} = \sqrt{\frac{س^{۴}}{ی^{۲}} - س^{۲}} = \frac{س}{ی}\sqrt{س^{۲} - ی^{۲}}$$

$$\text{اسواسطے} \quad \frac{صو}{ی} = \frac{\sqrt{س^{۲} - ی^{۲}}}{س}$$

$$\text{پس}\ لا = لا - \sqrt{س^{۲} - ی^{۲}} \quad \text{اسواسطے}\ لا = \sqrt{س^{۲} - ی^{۲}} + لا$$

اب لا اور ی کی ان قیمتون کی خط محبل کی مساوات مین رکہو ارتباط مطلوب لا اور ی کے درمیان دریافت کرو اس طرح سے اندراج قیمت آسانی سے ہو سکتا ہے کہ

$$ی = \frac{س}{۲}\left(ی^{\frac{لا}{س}} + ی^{-\frac{لا}{س}}\right)$$

$$\text{اسواسطے}\ \sqrt{ی^{۲} - س^{۲}} = \frac{س}{۲}\left(ی^{\frac{لا}{س}} - ی^{-\frac{لا}{س}}\right)$$

= نٓ قط۲ سہ + نٓ جب۲ سہ + ع۲ - ۲نٓ ع قط سہ بموجب (۲) کے

اس مساوات درجہ دوم ع سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ع - نٓ قط سہ = ± نٓ جم سہ

اب اگر ہم اوپر کی علامت لین تو ع = نٓ (۱ + جم۲ سہ) / جم سہ دریافت ہوگا اور (۲) سے

نٓ = ۱ + ۳ جم۲ سہ / جم۲ سہ نٓ دریافت ہوگا مگر اس حل کو ترک کر دینا چاہئے

کیونکہ اوس سے ہمکو یہہ دریافت ہوتا ہے کہ ق یعنی

نق زنٓ / زع = ۱ + ۳ جم۲ سہ / جم سہ (۱ + جم۲ سہ) نٓ اور یہہ مساوات ق = نٓ قط سہ سے تطبیق نہین پاتا

اب اگر نیچے کی علامت لین تو یہہ دریافت ہوگا کہ ع = نٓ جب۲ سہ / جم سہ اور (۲) سے

ہمکو یہہ دریافت ہوتا ہے کہ نٓ = نٓ جب سہ / جم۲ سہ پس رع = ن جب سہ یعنی

اسے معلوم ہوا کہ لف ایک مساوی الزوایا خط پیچان ہے اور اوسمین زاویہ مستقل ہے جو دی

خط منحنی کی مساوات ذاتی

(۱۰۳) فرض کرو کہ خط منحنی کی قوس کا طول کسی نقطہ معین سے پیمایش کیا جاے اور ایک مماس اوسکی طرف متغیر سے کھینچا جاے اور دوسرا مماس کسی اور نقطہ معین خط منحنی سے کھینچا جاے ان دونو مماسون کے میلان جس زاویہ پر ہو اوسے سر سے تعبیر کرو تو مساوات جسے ارتباط صو اور سر کے درمیان قائم ہو مساوات ذاتی خط منحنی کی کہلاتی ہے علی العموم بعض تحقیقات کے اندر اور علی الخصوص لف اور ذی لف کی کے تحقیقات کے اندر یہہ ترکیب خط منحنی کی تشخیص کرنیکی نہایت سادی اور آسان بہ نسبت اوس معمولی ترکیب کے ہی جسمین قائم الزاویہ محورون کی طرف رجوع کرنی پڑتی ہین یہہ محور خارج خط ہوتی ہین

(۱۰۴) اول ہم بتلاتی ہین کہ خط منحنی کی مساوات معمولی سے کس طرح مساوات ذاتی خط منحنی کی حاصل ہوتی ہے

فرض کرو کہ ی = ح (لا) مساوات خط منحنی کی ہے مبدء خط منحنی پر ہے اور محور ی کا مماس اوس

نقطہ پر کے مساوات معلوم سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{ز ی}}{\text{ز لا}} = \text{ح} \,(\text{لا}) = \text{مس سر}$$ بموجب فرض کے

پس لا ارقام مس سر میں معلوم ہوگیا لا = ح (مس سر) کے لکھو تو

$$\frac{\text{ز لا}}{\text{ز سر}} = \text{ح} \,(\text{مس سر})\ \text{قط}^{2}\ \text{سر}$$

اور نیز $\frac{\text{ز صو}}{\text{ز لا}} = \text{م سر}$

اسواسطے $\frac{\text{ز صو}}{\text{ز سر}} = \text{ح} \,(\text{مس سر})\ \text{قط}^{2}\ \text{سر م سر}$

اس مساوات سے صو ارقام سر میں کلی لینے سے دریافت ہوسکتا ہی ایسکے متشابہ نتیجہ حاصل ہوتا اگر سد بر محور لا کا منطبق ایک مماس پر ہوتا

(۱۰۵) خط تدویر پر اوپر کی دفعہ کا عمل کرو

دفعہ ۳۵۸ علم حساب الجزئیات سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{ز ی}}{\text{ز لا}} = \sqrt{\left(\frac{\text{۲ط} - \text{لا}}{\text{لا}}\right)} = \frac{1}{\text{مس سر}}$$

اسواسطے $\frac{\text{۲ط}}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{حب}^{2}\ \text{سر}}$ اور $\text{لا} = \text{۲ط حب}^{2}\ \text{سر}$

$$\frac{\text{ز لا}}{\text{ز لا}} = \text{۴ط حب سر جم سر}$$

$$\frac{\text{ز صو}}{\text{ز سر}} = \text{جم سر}\ \frac{\text{ز لا}}{\text{ز سر}} = \text{۴ط جم سر}$$

اسواسطے $\text{صو} = \text{۴ ط حب سر} + \text{س}$

مقدار مستقل صفر ہوگی اگر ہم صو کو نقطہ معین سے جسے اول مماس کہا گیا ہی پیمائش کریں یعنی خط منحنی کی راس سے

(۱۰۶) مساوات ذاتی معلوم ہے اوسے خط منحنی کی معمولی مساوات استنباط کرو

ہمکو معلوم ہے کہ $\frac{\text{ز لا}}{\text{ز صو}} = \text{جب سر}$

اسواسطے $\text{لا} = \text{مع ز صو جب سر}$

علی ہذا القیاس $\text{ی} = \text{مع ز صو جم سر}$

اب صو موصوف فرض کیے ارقام سر مین معلوم ہے تو کلی لینے سے ہم لا اور ی کو ارقام سر مین دریافت کر سکتے ہین اور سر کو ساقط کر کے ہم معمولی مساوات خط منحنی کی لا اور ی مین دریافت کر سکتے ہین

(۱۰۷) خط تدویر پر دفعہ گذشتہ کا عمل کرو

یہان صو = ۴ ط جب سر

پس لا = مع ز صو حب سر = ۴ ط مع حب سر جم سر ز سر = س ـ ط جم ۲ سر

ی = مع ز صو جم سر = ۴ ط مع جم سر ز سر = س + ۲ ط (۲ سر + جب ۲ سر)

اسے معلوم ہوا کہ سر کی ساقط کرنے سے ہمکو معمولی مساوات حاصل ہوگی اگر قائم الزاویہ محورون کا مبدء راس خط منحنی کا ہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ س = ط اور س = ۰

(۱۰۸) اب امثلہ متفرقہ معادلات ذاتی کی لکھتے ہین

مساوات ذاتی دائرہ بظاہر صو = ط سر کے معلوم ہوتی ہے

(۱۰۹) مساوات خط محمل کی

ی + س = س/۲ (ی^(لا/س) + ی^(-لا/س))

مبدء خط منحنی پر ہے اسے معلوم ہوا کہ

ز ی / ز لا = ۱/۲ (ی^(لا/س) ـ ی^(-لا/س)) اور صو = س/۲ (ی^(لا/س) ـ ی^(-لا/س))

پس اگر سر وہ زاویہ ہو جو کسی نقطہ کا مماس مبدء کے مماس پر بناتا ہے تو

صو = س مس سر

(۱۱۰) ہم نے دفعہ ۸۶ مین دیکھا ہے کہ

ز ی / ز لا = (جم ر ـ جم ((ط + ص)/ص) ر) / (حب ((ط + ص)/ص) ر ـ حب ر) = مس سر کے فرض کرو

تو سر = (ط + ۲ ص)/(۲ ص) بر

اسی دفعہ کے موافق

صو = ـــ ۱۲ (س^۲ - ط^۲) (س^۲ - ق^۲) + س

= ـــ ۴ ص (ط + ص) / ط جم ط بر / ۲ ص + س

= ۴ ص (ط + ص) / ط (۱ - جم ط بر / ۲ ص)

اگر ہم صو کو اوس نقطہ سے ناپین جہان بر = ۰ تو

صو = ۴ ص (ط + ص) / ط (۱ - جم ط سر / ط + ۲ ص)

ہم اس نتیجہ کو اسطرح سادہ بنا سکتے ہین کہ

سر = کہ (ط + ۲ ص) / ۲ ط + سر اور صو = ۴ ص (ط + ص) / ط + صو کہین

اسکے یہہ معنی ہین کہ قوس کو بجای راس سے ناپنے کے قرن سے ناپین پس

صو = ۴ ص (ط + ص) / ط جب ط سر / ط + ۲ ص

اسمین زیروں کو اڑا سکتے ہین

(۱۱۱) مساوات خط تدویر مدیر داخلی کو بھی اسطرح لکھہ سکتے ہین کہ

صو = ۴ ص (ط - ص) / ط جب ط سر / ط - ۲ ص

(۱۱۲) اخر دو دفعون سے ظاہر ہوتا ہی کہ جب ن چھوٹا واحد سے ہو تو صو = ل جب ن سر مساوات تدویر مدیر خارجی کو تعبیر کرتی ہے اور جب ن بڑا واحد سے ہو تو یہہ مساوات تدویر مدیر داخلی کو تعبیر کرتی ہے مثلاً اگر

صو = ل جب سر/۲ اور صو = ل جب سر/۳ اور صو = ل جب سر/۴ اور صو = ل جب سر/۵

تو تدویر مدیر خارجی حاصل ہونگے جنمین ص/ط = ۱/۲ و ۱ و ۳/۲ و ۲ . . . کے

اگر صو = ل جب ۲ سر اور صو = ل جب ۳ سر اور صو = ل جب ۴ سر اور صو = ل جب ۵ سر

تو تدویر مدیر داخلی حاصل ہوتے ہین جنمین ص/ط = ۱/۴ و ۱/۳ و ۳/۸ و ۲/۵ . . .

(۱۱۳) اگر ق نصف قطر انحناء خط منحنی کا اوس نقطہ پر ہو جو صو اور سر سے تشخیص ہوتا ہی تو بموجب دفعہ ۲۴۴ علم حساب الجزئیات کے

ماحصل $\frac{ن}{۲}$م یا $\frac{ن}{۲}$م + $\frac{۱}{۲}$ الف صحیح ہے

(۲) خط منحنی جسکا مماس ہمیشہ خط معلوم کی برابر ہوتا ہو اوسکی قوس کا طول فرن سے ناپا گیا ثابت کرو ہمیشہ صو = بس لوک $\frac{س}{ی}$ سے تشخیص ہوتا ہے

(۳) ثابت کرو کہ ڈای اوملس کا خط منحنی استقامت کی قابلیت رکھتا ہی اور

(۴) ثابت کرو کہ خط منحنی جسکی مساوات ۴ (لا^۲ + ی^۲) − ط^۲ = ۳ ط$^{\frac{۴}{۳}}$ ی$^{\frac{۲}{۳}}$ ہے اوسکا کل طول $\frac{ط^۲ ۶}{ب}$ ہی

[یہہ بہی ثابت ہوسکتا ہے کہ $\left(\frac{ز صو}{ز ی}\right)^۲ = \frac{ط^{\frac{۲}{۳}}}{۲ی^{\frac{۲}{۳}} (ط^{\frac{۲}{۳}} − ی^{\frac{۲}{۳}})}$]

(۵) خط منحنی (لا + ی)$^{\frac{۲}{۳}}$ − (لا − ی)$^{\frac{۲}{۳}}$ = ط$^{\frac{۲}{۳}}$ کی قوس کا طول حدود غائی (لا$_۱$ و ی$_۱$) اور (لا و ی) کے درمیان

$\frac{۱}{۲ط^{\frac{۱}{۳}}}$ [(لا + ی)$^{\frac{۴}{۳}}$ + (لا − ی)$^{\frac{۴}{۳}}$]$^{\frac{۳}{۲}}$ − $\frac{۱}{۲ط^{\frac{۱}{۳}}}$ [(لا$_۱$ + ی$_۱$)$^{\frac{۴}{۳}}$ + (لا$_۱$ − ی$_۱$)$^{\frac{۴}{۳}}$]$^{\frac{۳}{۲}}$

(۶) اگر صو = ط ی$^{\frac{لا}{س}}$ تو لا اور ی کے درمیان ربط دریافت کرو

(۷) ثابت کرو کہ مساوات ذاتی قریب البیضوی کی یہہ ہے کہ

$\frac{ز صو}{ز سر}$ = $\frac{۳ط}{جم^۳ سر}$ یا صو = $\frac{ط}{۲}$ لوک $\frac{۱ + جب سر}{۱ − جب سر}$ + $\frac{ط جب سر}{۱ − جب سر}$

(۸) خط منحنی ی^۳ = ط لا^۲ کی مساوات ذاتی

صو = $\frac{۸ ط}{۲۷}$ (قط^۳ سر − ۱) ہے

(۹) ثابت کرو کہ قریب البیضوی کی لف کا طول قوس فرن سے اوس نقطہ تک جہان لف قریب البیضوی سے ملتا ہی ۲ ط (۳ $\sqrt{۳}$ − ۱) ہی اسمین ۴ ط عرض مستقیم قریب البیضوی کا ہے

(۱۰) تدویر مدیر خارجی کا لف تدویر مدیر خارجی ہے اور دائرہ ساکن کا نصف قطر $\frac{ط^۲}{ط + ۲ص}$ ہی اور نصف قطر دائرہ متحرک $\frac{ط ص}{ط + ۲ص}$ ہے (دفعات ۱۱۰ اور ۱۱۴ دیکہو)

(۱۱) ثابت کرو کہ اگر مساوات خط منحنی کی مساواتوں

لا = جب بر ھ^ن (بر) + جم بر ھ^{ن} (بر)

اور ی = جم بر ھ^ن (بر) − جب بر ھ^ن (بر)

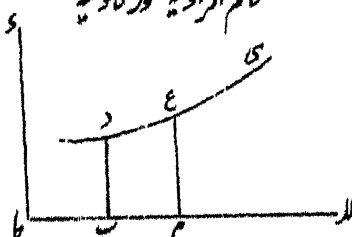
سے ر کے ساقط کرنے سے دریافت ہو تو

صو = ھر (ر) + ھرَ (ر)

(۱۲) خط منحنی ۸ طا ۲ ی = لا۳ + ۶ طا لا۲ کا طول مبدا سے ناپا گیا

لا / ۱۲ طا ۸ (لا۲ + ۴ طا)^۳/۲ ہے

باب ہفتم

خطوط منحنی مستوی اور سطوح بیرونی کے رقبے

مستوی رقبے — قائم الزاویہ صور قانونیہ — مفرد کلی

(۱۳۸) فرض کرو کہ د ع ی ایک خط منحنی ہی جسکی مساوات ی = مج (لا) ہی اور لا اور ی محددین نقطہ ع کے ہیں اور ا سے وہ رقبہ تعبیر ہوتا ہی جو خط منحنی اور محور اور معین ع م اور معین مقررہ د ب کے درمیان واقع ہی اور طا ب چھوٹا لا سے جبر مقابلہ کے موافق مقرر کیا گیا ہی تو علم حساب الجزئیات کی دفعہ ۳۰۴ کے موافق

زا / زلا = مج (لا)

اسے معلوم ہوا کہ ا = مع مج (لا) زلا

فرض کرو کہ ھر (لا) + س کلی مج (لا) کی ہے پس

ا = ھج (لا) + س

فرض کرو کہ جب معین متغیر محور ی سے لا۱ فاصلہ پر ہو جاتا ہی تو رقبہ ا۱ ہو جاتا ہی اور جب معین متغیر محور ی سے لا۲ کے فاصلہ پر ہوتا ہی تو رقبہ ا۲ ہو جاتا ہی تو

ا۱ = ھج (لا۱) + س اور ا۲ = ھج (لا۲) + س

اسواسطے ا۲ - ا۱ = مع (ا۲) - مع (لا۱) = لا۲مع مج (لا) زلا

(۱۲۹) دائرہ پر اوپر کی دفعہ کا عمل کرو

مرکز جب مبدء ہوتا ہے تو مساوات دائرہ کی یہہ ہوتی ہی کہ ی۲ = ط۲ - لا۲ یہان مج (لا) = $\sqrt{ط^2 - لا^2}$

پس ا = مع مج (لا) زلا = مع $\sqrt{ط^2 - لا^2}$ زلا = $\frac{لا\sqrt{ط^2 - لا^2}}{2}$ + $\frac{ط^2}{2}$ حت$^{-1}$ $\frac{لا}{ط}$ + س

مقدار مستقل اس بات کے فرض کرنے سے معدوم ہوتی ہے کہ معین مقررہ محور ی پر منطبق ہوتا ہی شکل کے مرتسم کرنے سے یہہ بھی واضح ہوگا کہ محور لا اور محور ی اور دائرہ اور محور ی سے لا کے فاصلہ پر جو معین ہے ان سب کے درمیان جو رقبہ واقع ہوتا ہی وہ مثلث اور قطاع میں تقسیم ہوتا ہی اور اُ کے جملہ مین جو دو رقمین لکھی ہین اونمین اول سے مثلث کا رقبہ اور دوم سے قطاع کا رقبہ تعبیر ہوتا ہے اس امر سے طالب علم کو یہہ کلیہ اعظم بھی یاد رہ سکتی ہی کہ

مع $\sqrt{ط^2 - لا^2}$ زلا = $\frac{لا\sqrt{ط^2 - لا^2}}{2}$ + $\frac{ط^2}{2}$ حت$^{-1}$ $\frac{لا}{ط}$

(۱۳۰) بیضوی پر اوسی دفعہ کا عمل کرو

فرض کرو کہ رقبہ کل بیضوی کا دریافت کرنا ہی مساوات بیضوی کی اسطرح لکھہ سکتی ہین کہ

ی۲ = $\frac{ض^2}{ط^2}$ (ط۲ - لا۲) اسے معلوم ہوا کہ رقبہ ربع بیضوی کا

^{ط}مع$_0$ $\frac{ض}{ط}$ $\sqrt{ط^2 - لا^2}$ زلا = $\frac{ض}{ط}$ ^{ط}مع$_0$ $\sqrt{ط^2 - لا^2}$ زلا = $\frac{ض}{ط}$ $\frac{ک ط^2}{4}$ = $\frac{ک ط ض}{4}$

ہی اسے معلوم ہوا کہ رقبہ کل بیضوی کا ک ط ض ہی

(۱۳۱) قریب البیضوی پر اوسی دفعہ کا عمل کرو

مساوات قریب البیضوی کی ی۲ = ۴ ط لا ہی تو یہان

مج (لا) = $\sqrt{4 ط لا}$

اور مع $\sqrt{4 ط لا}$ زلا = $\frac{4\sqrt{4 ط لا^3}}{3}$ + س

پس بموجب طریقہ کتابت دفعہ ۱۲۸ کے

ام - ا = ...مع ... ط لا زلا = ... (لا ... - لا ...)

اگر لا = ۰ تو رقبہ کے واسطے ... لا ... حاصل ہوگا یعنی دو تہائی محدد لام اور

معین (ط لام) کا حاصل ضرب

(۱۳۲) خط تدویر پر اوسی دفعہ کا عمل کرو

صورت قانونیہ مع ی زلا سے کلی مطلوب بعض اوقات بہت آسانی سے لا اور ی کے اقام

مین ایک نئی مقدار متغیر کی استعانت سی بیان ہوسکتی ہے شلاً خط تدویر مین موافق دفعہ

۳۵۸ علم حساب الجبر ئیات کے لکھہ سکتے ہین کہ

لا = ط (ا - حم بر) اور ی = ط (بر + جب بر)

اسواسطے مع ی زلا = ط ... مع (بر + جب بر) جب بر زبر

= ط ... مع بر جب بر زبر + ... مع (ا - حم ۲ بر) زبر

اسے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ط ... (- برحم بر + جب بر) + ... (بر - جب ۲ بر / ۲) ہوگا

اب اگر اسکو بر کے حدود دغائی ۰ اور ... کے درمیان لین تو ہم رقبہ نصف خط تدویر کا حاصل ہوگا

اور ... حاصل ... ط ... ہوگا اسے معلوم ہوا کہ رقبہ کل خط تدویر کا برابر ... چند دائرہ متحرک کے

رقبہ سے ہوتا ہے

(۱۳۳) مساوات انیس تدویر کی یہہ ہے کہ

لا = ط (ا - حم بر) ی = ط بر

اسے ثابت ہوسکتا ہی کہ کل رقبہ منحنی دو چند دائرہ متحرک سے ہی

(۱۳۴) اگر ایک خط منحنی مساوات ی = مج (لا) سے تشخیص ہو تو خط منحنی اور محور ی

اور خطوط مستقیم جو متوازی محور لا کے کم اور کم کے فاصلوں پہ کہیچے جائین ان سکے

درمیان جو رقبہ ہوگا وہ ...مع مج (ی) زی ہوگا یہہ دعوی اسیطرح ثابت ہوسکتا ہے

جسطرح کہ دفعہ ۱۳۸ کا دعوی ثابت ہوسکتا ہے

(۱۳۵) دفعات ۱۲۸ اور ۱۳۴ کی صورتیں قانونیہ علم حساب الکلیات کے استعمال میں آنیکی
نہایت سادہ اور بکار آمد مثالیں ہم پہلے بیان کر چکے ہیں کہ علم حساب الکلیات کی تدوین اور
ایجاد کی اسباب میں ایک سبب یہہ بھی بڑا ہوا ہی کہ اوسے مسئلہ رقبہ منحنی کے دریافت کرنیکا
حل ہوتا ہی اور رموز جو استعمال میں آتی ہیں وہ ایسی صاف اور عیان ہیں کہ اون سے اعمال جو
ہونے چاہیے بخوبی سمجھہ میں آتے ہیں دفعہ کی شکل میں طالب علم دیکھے کہ قائم الزاویہ ع ع ن م
کیا خوبی کے ساتھہ ی ۵ لا سے تعبیر ہوتا ہی اور رقبہ ا ا ی ب کے دریافت کرنیکا عمل
یہی معنی رکھتا ہے کہ اول ہم وہ ازدیاد کریں جو ع ی ۵ لا سے تعبیر ہوتا ہی اور ۵ لا کو
غیر محدود کم کریں غرض رموز وہ کام میں آئی ہیں کہ اون سے اعمال بے تکلف عیان ہو جاتے ہیں

(۱۳۶) فرض کرو کہ خط منحنی ی = س جیب $\frac{لا}{ط}$ اور محور لا اور معین جو لا۱ اور لا۲ کے
فاصلوں پر ہیں اور محور ان سب کے درمیان کا رقبہ دریافت کرنا ہی ہمکو معلوم ہے کہ

$$\text{مع}_{لا_1}^{لا_2}\ س\ جب\ \frac{لا}{ط}\ زلا = س\ ط\ \left(جم\ \frac{لا_1}{ط} - جم\ \frac{لا_2}{ط}\right)$$

پس فرض کرو کہ لا۱ = ۰ اور لا۲ = ط کہ اسواسطے رقبہ ۲ س ط ہی
دوم فرض کرو کہ لا۱ = ۰ اور لا۲ = ۲ط کہ کو ما حصل

$$س\ ط\ \left(جم\ \frac{لا_1}{ط} - جم\ \frac{لا_2}{ط}\right)$$

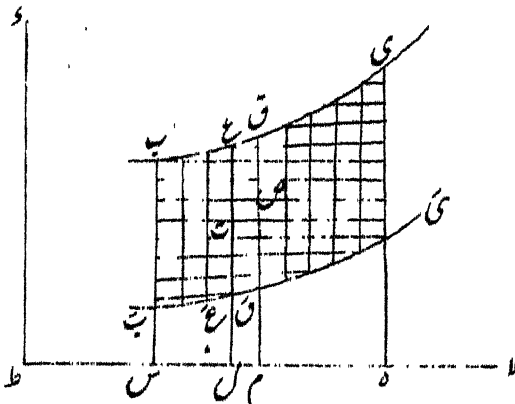
اس صورت میں صفر ہو جائیگا اسلئے اسکو دخل کسی طرح نہیں ہو سکتا اسواسطے کہ رقبہ کوئی مثبت
مقدار ہونی چاہیئے نفس الامر میں جب $\frac{لا}{ط}$ منفی لا = ط کہ سے لا = ۲ط کہ تک ہے
لیکن اثبات میں کہ رقبہ برابر مع ی زلا کے ہے ی مثبت فرض کیا گیا ہے
اگر ی حقیقت میں منفی ہو تو رقبہ مع (−ی) زلا ہوگا
پس اس حال کی صورت میں رقبہ

$\text{مع}_{0}^{2ط}$ س جب $\frac{لا}{ط}$ زلا نہیں ہوگا بلکہ $\text{مع}_{0}^{ط}$ س جب $\frac{لا}{ط}$ زلا + $\text{مع}_{ط}^{2ط}$ س $\left(-جب\ \frac{لا}{ط}\right)$ زلا ہوگا

یعنی $\text{مع}_{0}^{ط}$ س جب $\frac{لا}{ط}$ زلا − $\text{مع}_{ط}^{2ط}$ س جب $\frac{لا}{ط}$ زلا ہوگا

اسسے ۲ س ط + ۲ س ط یعنی ۴ س ط حاصل ہوگا

رقبہ مستوی قائم الزاویہ صور قانونیہ کل مثناۃ

(۱۳۷) دفعہ ۱۲۸ مین ہمنے ایک صورت قانونیہ رقبہ منحنی کی دریافت کرنیکے واسطے تحریر کی ہے اوس صورت قانونیہ مین یہہ فرض کیا جاتا ہے کہ رقبہ حد غائی اون متعدد رقبون کی ہے جو اوسکی اجزاء ترکیبی ہین اور ہر جز ترکیبی ایک مقدار ایسی ہی جسکا نمونہ ج د Δ لا ہے اب ہم ایک اور ترکیب بیان کرتے ہین جسمین رقبہ مطلوب اون رقبون مین تحلیل ہوتا ہی جو اوسکے اجزاء ترکیبی ہین

فرض کرو کہ ہمکو وہ رقبہ دریافت کرنا ہی جو درمیان خطوط منحنی ب ع ق ی اور بَ عَ قَ یَ اور خطوط مستقیم ب بَ اور ی یَ کے واقع ہی ایک سلسلہ خطون کا متوازی محور ی کے کہینچو اور ایک دوسرا سلسلہ خطوط کا متوازی محور لا کے نکالو اور فرض کرو کہ اس طرح جو مستطیل بنائی جائین اونمین سے ایک ص ت ہی اور ص کے محددین لا اور ی اور ت کے محددین لا + Δ لا اور ی + Δ ی ہین تو رقبہ مستطیل ص ت کا Δ لا Δ ی ہے اس سے معلوم ہوا کہ رقبہ مطلوب اس طرح دریافت ہوسکتا ہی کہ تمام مستطیلین Δ لا Δ ی کی جمع کرین اور حد غائی Δ لا اور Δ ی کو غیر متناہی کم فرض کرکے حد غائی حاصل کرین

اب تجمیع مطلوب ایسی رقمون Δ لا Δ ی کی اس طرح ہوتی ہے کہ اول ہم تمام مستطیل جو مشابہ ص ت کے ہین اور قطعہ عَ ق ع قَ کے اندر واقع ہین جمع کرتے ہین اور جب اس

قطعہ کا رقبہ حاصل ہو جائے تو اس قطعہ کے متشابہ جو اور قطعات ب ا ت اور ی ی کے درمیان واقع ہین اونکو جمع کرین غلطی اسمین یہہ واقع ہوتی ہے کہ ہر ایک قطعہ کے نیچے اور اوپر جو اجزاء ترکیبی ہین اونکا رقبہ ٹہیک ٹہیک نہین لیتے کیونکہ وہ کامل مستطیل نہین ہین اور یہہ غلطی حد نمائی کے لینے ہین جب
△ لد اور △ ی غیر متناہی کم کی جائین جاتی رہیگی

فرض کرو کہ ی = مح (لد) مساوات اوپر کے خط منحنی کی ہے اور ی = ھج (لد) مساوات نیچے کی خط منحنی کی اور ط س = س اور و آ = ھ اور ا رقبہ مطلوب کو تعبیر کرتا ہی تو رقبہ مطلوب یہہ حاصل ہوگا کہ

ا = س مع ھ ھج (لد) مع مح (لد) ز لد ز ی

اسواسطے کہ اس صورت بیانیہ کا رموز مین وہی مطلب ہے جو اوپر الفاظ مین بیان کیا گیا

اب مع ز ی = ی اسواسطے مع ھج (لد) مح (لد) ز ی = مج (لد) ــ ھج (لد)

پس اسے یہہ حاصل ہوا کہ

ا = س مع ھ [مح لد ــ ھج لد] ز لا

اس حالتمین اس صورت بیانیہ کی صداقت کو آنکہہ سے دیکھتے ہین اسلئے کہ

مح (لد) ــ ھج (لد) = ع ق ــ ع ق پس [مح لد ــ ھج لد] △ لد

رقبہ قطعہ ع و ع ق کا ہی اور اوپر کی صورت قانونیہ سے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ وہ حاصل جمع ایسی قطعات کا ہے

خطوط مستقیم جو اوپر کی شکل مین کہنچے ہین وہ کچہہ ضرور نہین کہ برابر ہی ہون یعنی اجزاء ترکیبی جنکا انموذج △ لد △ ی ہے کچہہ ضرور نہین کہ ایک ہی رقبہ رکہین

(۱۳۸) دفعہ گذشتہ کا ماحصل یہہ ہے کہ رقبہ ا اس مساوات

ا = س مع ھ [مج (لد) ــ ھج (لد)] ز لد

سے دریافت ہوتا ہے یہہ نتیجہ نہایت آسان طور سے حاصل ہوتا ہے جیسا کہ دفعہ گذشتہ کے

دوسرے حصہ مین بیان کیا گیا پس یہہ قطعی ضرور تہا کہ ہم کلی متناہ کی صورت بیان کرتے لیکن ہم نے

ا = سںمع سںمع لد مع زلد زی

لکہکر طلبہ کو اس بات پر متوجہ کیا کر وکہ کلی متناہ کو توضیح اور تشریح کے ساتہہ سمجہین اور اسطرح سے جہان قطعی ضرورت کلی متناہ کی امثلہ مین ہوگی وہان طالب علم آسانی سی اوسکا عمل کریگا

(۱۳۹) رقبہ جسکی قیمت ہم نے نکالی ہی خطوط منحنی لد = ھج (ی) اور لد = مج (ی) سے اور خطوط مستقیم سے جو محور لد اور ی کے متوازی ہین اور ھ کے فاصلون پر ہین محدود ہوا ہے تو اسیطرح سی ہمکو یہہ حاصل ہوسکتا ہی کہ

ا = سںمع ھج(ی) مج(ی) مع زی زلد = سںمع [مج (ی) − ھج (ی)] زی

دفعات ۱۳۷ اور ۱۳۸ کی صور قانونیہ کی بعض مثالون پر خیال کرین تو معلوم ہوگا کہ ہر مثال مین دونو صور قانونیہ کام مین آسکتی ہین لیکن اکثر اونمین سی ایک کا استعمال بہ نسبت دوسری کے آسان ہوتا ہی

(۱۴۰) قریب البیضوی ی۲ = ۴ ط لد اور دائرہ ی۲ = ۲ ط لد − لد۲ کے درمیان جو رقبہ واقع ہوا اوسکا دریافت کرنا منظور ہے

خطوط منحنی مبدء پر گذرتی ہین اور اوس نقطہ پر ملتی ہین جہان لد = ط پس اگر ہم وہی رقبہ لین جو محور کی مثبت جانب مین واقع ہی تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ا = ∫ مع [√(۲ط لد − لد۲) − ۲√(ط لد)] زلد = کہ ط۲/ہ − ۴ط۲/۳

اسلیے کل رقبہ ۲ (کہ ط۲/ہ − ۴ط۲/۳) ہوگا

فرضکرو کہ اس مثال مین ہم اول کلی بلحاظ لد کے لینی چاہتے ہین مساوات ط۲ = ۲ ط لد − لد۲ سے ہم یہہ استنباط کرتے ہین کہ لد = ط ± √(ط۲ − ی۲) اور یہہ شکل کے دیکہنے ہی سے معلوم ہوجائیگا کہ اس سوال مین نیچی کی علامت لینی چاہیے

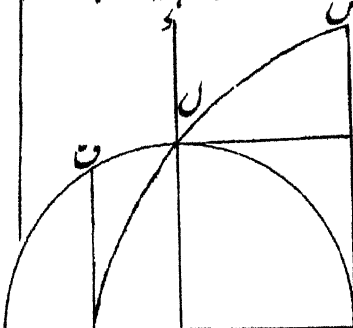
پس فرض کرو کہ لد بجای ط − √(ط۲ − ی۲) کے اور لد م بجای ی۲/۴ط کے قائم ہوتا ہے

$$\text{ا} = \int \int_{\text{لا}_1}^{\text{لا}_2} \text{ز ی ز لا} = \int \left[\text{ط} - \frac{\text{ی}^2}{\text{ط}} + 2(\text{ط}^2 - \text{ی}^2) \right] \text{ز ی}$$

$$= \frac{\text{ط}^2}{3} - \text{ط}^2 + \frac{4\text{ط}^2}{3} = \frac{4\text{ط}^2}{3} - \frac{4\text{ط}^2}{3}$$ یہی پہلے نکلا تھا

طالب علم کو چاہیے کہ وہ شکل بنائے اور کلیات کی حدود غائی کی طرف نہایت توجہ کرے

(۱۴۱) اس شکل مین ص مرکز دائرہ ب ل د کا ہی

اور سنیرص ماسکہ بھی قریب البیضوی ا ل س کا ہے

ا ل ب اور ل د س رقبون کے حاصل کرنیکے واسطے جو کلیات لیجائیگی اونکا بیان اب ہم کرینگے

اس مثال کو فقط اس نظر سے لکھا ہی کہ کلی مثناۃ کی توضیح اور تشریح ہوجاوے ورنہ اوسمین کوئی اور عجیب نتیجے نہین ہین یہہ رقبے اول صور قانونیہ سے جو ابھی بیان ہوئے ہین بآسانی استخراج ہوتی ہین ا ل ب تفاوت رقبہ قریب البیضویہ ا ل ص اور ربعہ دائرہ ص ل ب کا ہی اور علی ہذا القیاس ل د س معلوم ہوسکتا ہی

ص کو مبدء ٹھہراؤ رقبہ ا ل ب کے دریافت کرنیکے اندر اسمین آسانی ہی کہ محور لا کی مثبت سمت کو بائین طرف مقرر کرین اگر ۲ ط عرض مستقیم قریب البیضوی کا ہو تو ا ط نصف قطر دائرہ کا ہوگا مساوات قریب البیضوی کی $\text{ی}^2 = 4\text{ط}(\text{ط} - \text{لا})$ اور مساوات دائرہ کی $\text{ی}^2 = 4\text{ط}^2 - \text{لا}^2$

فرض کرو کہ اول ہم بلحاظ لا کے سرجزوی لین تو

$$\text{رقبہ ا ل ب} = \int \int_{\text{لا}_1}^{\text{لا}_2} \text{ز ی ز لا}$$

اسمین $\text{لا}_1 = \text{ط} - \frac{\text{ی}^2}{4\text{ط}}$ اور $\text{لا}_2 = \sqrt{4\text{ط}^2 - \text{ی}^2}$

اسواسطے کہ یہان $(\text{لا}_2 - \text{لا}_1)\Delta$ ی اوس قطعہ کو تعبیر کرتا ہی جو درمیان دو خطوط منحنی اور دو خطوط مستقیم کے واقع ہوتا ہے اور یہہ دو خطوط مستقیم متوازی محور لا کے ہین

اور یہہ قطعات محور لا سے اون فاصلون پر واقع ہین جو ۰ اور ۲ ط کے درمیان ترتیب پاتی ہین
پس کلی بلحاظ ر کے حدود غائی ۰ اور ۲ ط کے درمیان واقع ہی
فرض کرو کہ ہم اول کلی بلحاظ ر کے لیتے ہین تو ہم کو چاہیئے کہ رقبہ کو دو حصون مین خط مستقیم ا ف سے
تقسیم کرین فرض کرو کہ

$$ر_1 = \sqrt{4ط^2 - 4ط\,لا} \quad \text{اور} \quad ر_2 = \sqrt{4ط^2 - لا^2}$$

$$\text{تو رقبہ } ا\,ل\,ف = \int_{0}^{ط}\int_{ر_1}^{ر_2} زلا\, زر = \int_{0}^{ط} (ر_2 - ر_1)\, زلا$$

$$\text{رقبہ } ا\,ف\,ب = \int_{ط}^{2ط}\int_{0}^{ر_2} زلا\, زر = \int_{ط}^{2ط} ر_2\, زلا$$

ان دو حصون کا حاصل جمع رقبہ $\overline{ا\,ل\,ب}$ کا ہے

دوم رقبہ $\overline{ل\,د\,س}$ کا لو اب فرض کرو کہ محور لا کی مثبت سمت دائین طرف ہے
تو مساوات قریب البعضوی کی $ر^2 = 4ط(ط + لا)$ اور دائرہ کی $ر^2 = 4ط^2 - لا^2$ ہے
کلی بلحاظ ر کے اول ہم لیتے ہین پس فرض کرو کہ

$$ر_1 = \sqrt{4ط^2 - لا^2} \quad \text{اور} \quad ر_2 = \sqrt{4ط^2 + 4ط\,لا}$$

$$\text{تو رقبہ } \overline{د\,ل\,س} = \int_{0}^{2ط}\int_{ر_1}^{ر_2} زلا\, زر$$

اب ہم کلی بلحاظ لا کے اول لیتے ہین تو رقبہ کو دو حصون مین خط ل ک سے تقسیم کرنا چاہیے
فرض کرو کہ

$$لا_1 = \sqrt{4ط^2 - ر^2} \quad \text{اور} \quad لا_2 = \frac{ر^2}{4ط} - ط$$

تو ہمکو یہہ دریافت ہوگا کہ $د\,س = 2ط\sqrt{3} = ص$ کے فرض کرو تو

$$\text{رقبہ } \overline{د\,ل\,ک} = \int_{0}^{2ط}\int_{لا_2}^{لا_1} زر\, زلا$$

$$\text{رقبہ } \overline{س\,ل\,ک} = \int_{2ط}^{ص}\int_{لا_2}^{2ط} زلا\, زر$$

ان دو حصون کے مجموعہ سے رقبہ $\overline{ل\,د\,س}$ کا تعبیر ہوتا ہے

(۱۴۳) دفعات ۱۳۷ اور ۱۳۹ کے صور قانونیہ وہان ایک صورت مین بڑی کار آمد ہین

جہان خطوط منحنی حد بناتیوالے ایک خط منحنی کے فروع ہون فرضکرو کہ مساوات خط منحنی کی

$$(ی - م س - س ح)^2 = ط^2 - لا^2 \text{ پس}$$

$$ی = م لا + س \pm \sqrt{ط^2 - لا^2}$$

$$\text{اب یہان } ھح(لا) = م لا + س - \sqrt{ط^2 - لا^2}$$

$$مح(لا) = م لا + س + \sqrt{ط^2 - لا^2}$$

$$\text{پس } مح(لا) - ھح(لا) = ۲\sqrt{ط^2 - لا^2}$$

اور کل رقبہ منحنی

$$\int_{-ط}^{ط} ۲\sqrt{ط^2 - لا^2}\, زلا \text{ یعنی } \pi ط^2 \text{ ہے}$$

(۱۴۳) ابتک ہم نے محور قائم الزاویہ فرض کئے لیکن اگر وہ محرف ہون اور زاویہ دیرمایل ہو تو دفعہ ۱۲۸ کی صورت قانونیہ اس صورت کی ہوجائیگی کہ

$$ا = حب د \int مح(لا)\, زلا$$

اور اور صور قانونیہ مین بہی تبدل اسی قبیل کا واقع ہوگا اور یہہ بہی ظاہر ہی کہ رقبہ کے ایسے اجزاء ترکیبی جو ی Δ لا اور Δ ی Δ لا سے قائم الزاویہ محورون کی حالت مین تعبیر ہوتی تہی اب حب د ی Δ لا اور حب د Δ لا Δ لا سے اوس حالت مین تعبیر ہونگی کہ محورون کا میلان زاویہ دیر ہو

مثلاً مساوات قریب البیضوی کی $ی^2 = ۴ ط لا$ ہو جب محرف محورون کا نظم اسطرح ہو کہ قطر اور مماس طرف قطر پر محرف محور ہون تو خط منحنی اور محور لا اور اوسکی معین کے جسپر لا = س کے ہے ان سب کے درمیان جو رقبہ واقع ہوگا وہ یہہ ہوگا کہ

$$حب د \int_{0}^{س} \sqrt{۴ ط لا}\, زلا = \frac{۴}{۳} حب د \sqrt{ط}\, س^{\frac{3}{2}}$$

یعنی دو تہائی اوس متوازی الاضلاع کی ہے جسکا ایک ضلع محدد $\overline{س}$ ہے اور اوسکی متصل کا ضلع محدد $\overline{س}$ کی طرف کا معین ہے

اسے معلوم ہوا کہ مقدار مستقل کی زیادہ کرنے سے یہ حاصل ہوگا کہ

ا = ط^۲/س^۲ (ہم^۲ بر − ۲)^{۳/۲} − ۳ط^۲/س^۳ ہم بر + ۲ط^۲ ہم بر + س

= ۲ط^۲ ہم بر + ۳ط^۲/س^۲ . (ہم ۲بر)^{۳/۲} − ہم^۳ بر / حب^۲ بر + س

مقدار مستقل صفر ہوگی اگر اکا آغاز خط ابتدائی سے ہو کیونکہ تحقیقات سے معلوم ہوگا کہ

۲ ہم بر + ط^۲/س^۲ . ((ہم ۲بر)^{۳/۲} − ہم^۳ بر)/(حب^۲ بر) معدوم ہوتی ہے جب بر = ...

(۱۴۷) خط منحنی ن = ط (بر + حب بر) پر اوپر کی دفعہ کا عمل کرکے بیان

ا = ط^۲/۲ مع (بر + حب بر)^۲ زبر = ط^۲/۲ مع (بر^۲ + ۲بر حب بر + حب^۲ بر) زبر

اور مع بر حب بر زبر = − بر ہم بر + حب بر

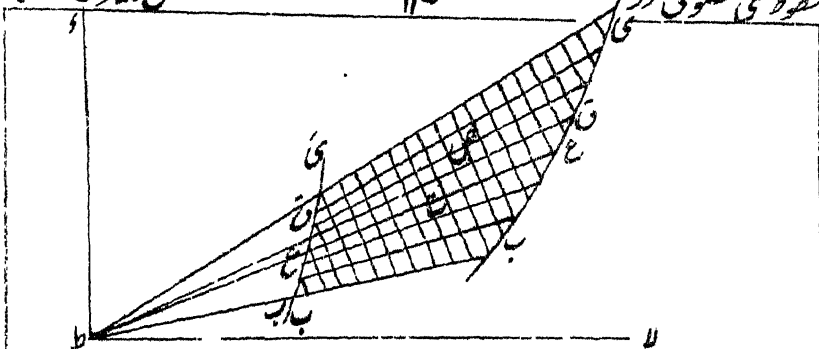
مع حب^۲ بر زبر = ۱/۲ مع (۱ − ہم ۲بر) زبر = بر/۲ − حب ۲بر/۴

پس ا = ط^۲/۲ [بر^۳/۳ − ۲بر ہم بر + ۲ حب بر + بر/۲ − حب ۲بر/۴] + س

فرض کرو کہ ہمکو اوس نہایت چھوٹے حصہ کا رقبہ دریافت کرنا ہی جو خط منحنی اور نصف قطر سے کے خط ابتدائی سے زاویے قائمہ بناتا ہے احاطہ ہوتا ہی تو اس صورت میں ۔ اور π/۲ کہ حدود غائی کلی کی ہونگین پس رقبہ مطلوب

ط^۲/۲ [π^۳/۲۴ + π/۴ + ۲] ہے

خطوط منحنی مستوی قطعی صور قانونیہ کلی شناۃ

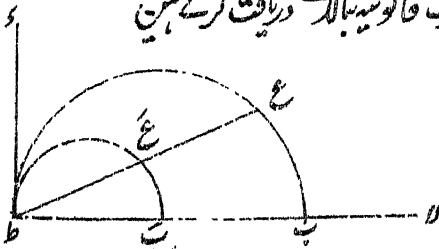
(۱۴۸) دفعہ ۱۴۴ مین ہمنے صورت قانونیہ رقبہ منحنی دریافت کرنیکے واسطے قائم کی ہے صورت قانونیہ مین فرض کیا گیا ہی کہ رقبہ اول متعدد رقبون کی کہ اجزاء ترکیبی ہین حد غائی ہے اور ہر ایک جز ترکیبی ایسی مقدار ہے جسکا انموذج ن^۲/۲ ∆ بر ہے اب ہم ایک اور ترکیب لکھتے ہین جسسے کہ رقبہ مطلوب کی تحلیل اجزاء ترکیبی مین ہوتی ہے

فرضکرو کہ خطوط منحنی ب غ ق ی اور بَ عَ قَ یَ اور خطوط مستقیم ب بَ اور ی یَ کے درمیان جو رقبہ ہے اسکو دریافت کرنا مطلوب ہے ایک سلسلہ نصف اقطار دائرہ کا ط سے کھینچو اور ایک سلسلہ دوائر کا ط کے مرکز پر پس رقبہ مستوی منحنی ذوارتعہ الاضلاع میں تقسیم ہوگیا فرضکرو کہ ان اجزاء ترکیبی میں سے ایک ص ت ہی اور نقطہ ص کے ر اور ہ محددین قطبیہ اور ت کے ر + ∆ ر اور ہ + ∆ ہ محددین قطبیہ ہیں تو رقبہ جز ترکیبی ص ت کا آخر کار ر ∆ ہ ∆ ر ہوگا اسسے معلوم ہوا کہ رقبہ مطلوب ر ∆ ہ ∆ ر کی تمام قیمتوں کے جمع کرنے سے حاصل ہوگا پس عمل حد غائی کے دریافت کرنیکا ∆ ہ اور ∆ ر کو غیر متناہی کم فرض کرکے کرو

ایسی ارقام ر ∆ ہ ∆ ر کے تجمیع اسطرح ہوتی ہے کہ اول ہم وہ اجزاء ترکیبی جمع کرتے ہیں جو ص ت کے متشابہ قطعہ ع ق قَ عَ میں ہیں اور اسطرح سے رقبہ قطعہ کا دریافت کرتے ہیں اور پھر اس قطعہ کے جو متشابہ قطعات ب بَ اور ی یَ کے درمیان واقع ہیں انکو جمع کرتے ہیں

فرضکرو کہ ر = ع (ہ) مساوات خط منحنی ب ع ق ی کی ہو اور رَ = عَ (ہ) مساوات خط منحنی بَ عَ قَ یَ کی ہی اور ہ۱ اور ہ۲ وہ زاویے ہیں جو طب اور طی خط طلا کے ساتھہ بناتے ہیں اور ا رقبہ مطلوب ہے تو

ا = ∫ ∫ ر زہ زر

ایک مثال میں ان صورِ قانونیہ میں سے ہر ایک کام میں آسکتی ہے اگر ایک کا استعمال بہ نسبت دوسرے کے مشکل ہوتا ہے

(۱۵۱) دو نصف دائروں طع ب اور طع ب اور خط مستقیم ب ب کے درمیان جو رقبہ واقع ہوتا ہے اوسکو صورت قانونیہ بالا سے دریافت کرتے ہیں

فرض کرو کہ ط ب = س اور ط ب = ھ تو مساوات طع ب کی لق = ھ جم بر

اور مساوات طع ب کی لق = س جم بر پس رقبہ

= $\int$ مع $\int_{س جم بر}^{ھ جم بر}$ لق زبر زلق

اب $\int_{س جم بر}^{ھ جم بر}$ لق زلق = $\frac{1}{2}$ (ھ² − س²) جم² بر

پس رقبہ = $\frac{1}{2}$ (ھ² − س²) $\int$ مع جم² بر زبر = $\frac{\pi}{8}$ (ھ² − س²)

فرض کرو کہ ہم اول کلی بلحاظ بر کے لیتے ہیں تو رقبہ کو اس صورت میں دو حصوں میں قوس دائرہ سے تقسیم کرو اور یہہ قوس دائرہ ط کے مرکز اور ط ب کے نصف قطر پر کھینچو پس رقبہ جو اس قوس اور خط مستقیم ب ب اور بڑی نصف دائرہ سے احاطہ ہوا ہے

$\int_{س}^{ھ}$ مع $\int_{0}^{جم^{-1}\frac{لق}{ھ}}$ لق زلق زبر ہے

اور رقبہ قوس مذکور اور نصف دائرہ طع ب اور نصف دائرہ کلاں سے احاطہ کیا گیا ہے

$\int_{0}^{س}$ مع $\int_{جم^{-1}\frac{لق}{س}}^{جم^{-1}\frac{لق}{ھ}}$ لق زلق زبر ہے

پس ان دو نو رقبوں کے مجموعہ سے رقبہ مطلوب دریافت ہوگا

(۱۵۲) دفعہ ۱۴۱ کے مثال پر قطبی صورت قانونیہ کا عمل کرو ص قطب ہے اور

رقبہ شکل مستوی کا تعبیر ہوتا ہی فرق تبلادی اول صورت مین رقبہ کی تحلیل کمست مستطیلون مین ہوئی ہی اور Δ للا Δ ر ٹہیک ٹہیک رقبہ ایک مستطیل کا ہی پس ان مستطیلون کے مجموعہ سے رقبہ مطلوب کے تعبیر کرنے مین فقط یہہ غلطی ہوتی ہے کہ ہر ایک قطعہ کے اوپر نیچے جو بیقاعدہ اجزای ترکیبی واقع ہوتے ہین اونمین جو خطا کیجاتی ہے اونکا بیان دفعہ ١٣٢ مین کیا گیا لیکن دوسری صورت مین اجزاء ترکیبی مین سے کسی ایک جز ترکیبی کا بھی صحیح رقبہ ق Δ ر Δ ق نہین ہوتا اسلیئے ہر جز ترکیبی مین ایک غلطی ہوتی ہے اسواسطے ضرور ہوا کہ ہم اسبات کو قاعدہ کے موافق تبلاوین کہ حد غائی لینے مین غلطی بالکل نہین باقی رہتی اور یہہ اسطرح تبلائی جاتی ہی کہ دفعہ ١٤٨ کی شکل مین جز ترکیبی ص ات تفاوت دو مدور قطاع کا ہے اور اوسکا ٹہیک رقبہ یہہ ہے کہ

$$\frac{1}{2}(ن + \Delta ن)^2 \Delta ر - \frac{1}{2} ن^2 \Delta ر$$

$$\text{یعنی } ن \Delta ن \Delta ر + \frac{1}{2}(\Delta ن)^2 \Delta ر$$

پس اول رقم کو تو رقبہ تعبیر کرنیکے لیئے رکہہ لیا ہے اور رقم $\frac{1}{2}(\Delta ن)^2 \Delta ر$ کو چہوڑ دیا ہے

اور ان دو نو رقمون کی نسبت

$$= \frac{\frac{1}{2}(\Delta ن)^2 \Delta ر}{ن \Delta ن \Delta ر} = \frac{\Delta ن}{2 ن}$$

(دلیجا:

Δ ن کو چہوٹا کافی فرض کرکے ہم اس نسبت کو جتنا چاہین چہوٹا بنا سکتے ہین اس سے معلوم ہوا کہ جو ارقام ہم نے چہوڑ دی ہین اونکے مجموعہ کو بمقابلہ اون ارقام کے مجموعہ کے جنکو رقبہ تعبیر کرنیکے لیئے ہمنے رکہہ لیا ہے آخر کو معدوم ہو جائیگی اور حد غائی مین کوئی غلطی نہ رہیگی

اور قطبی صور قانونیہ

(١٥٥) فرض کرو کہ طول اوس قوس منحنی کا ص ہے جو کسی نقطہ معین سے اوس نقطہ تک ناپا جاے جسکے محددین ق اور ر ہین اور اس دوسرے نقطہ سے جو مماس نکالا جاے اوسپر عمود جو مبدء سے قائم کیا جاے اوسی ع سے تعبیر کرو تو جیب اوس زاویہ

$$= \frac{س^2 - ط^2}{2} جتا^{-1} \frac{ک}{\sqrt{س^2 - ط^2}} - \frac{ک}{2}\sqrt{س^2 - ط^2 - ک^2}$$

$$= \frac{س^2 - ط^2}{2} جتا^{-1} \frac{\sqrt{لو^2 - ط^2}}{\sqrt{س^2 - ط^2}} - \frac{\sqrt{لو^2 - ط^2}\sqrt{س^2 - لو^2}}{2}$$

اسکو حدود دعائی لو = ط اور لو = س کے درمیان مقرر کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{س^2 - ط^2}{4}$ کہیے یعنی ص (ط + ص) کہ اسے معلوم ہوا کہ رقبہ $\frac{س}{4ط}$ ص (ط + ص) کا یعنی $\frac{(ط + 2ص)}{4ط}$ ص (ط + ص) کہ ہی اور اس ماحصل کو دوچند کرنے سے وہ رقبہ حاصل ہوتا ہے جو خط منحنی اور نصف اقطار دائرے کے درمیان واقع ہو اور یہہ نصف اقطار دائرہ دو متصل کے قرن سے کہیے گئے ہیں پس اسواسطے رقبہ $\frac{(ط + 2ص)}{2ط}$ ص (ط + ص) کہ ہی اس رقبہ کے اوس حصہ کا رقبہ جو قطاع مدور ہی کہ $\frac{ط ص}{2}$ ہی دوسرے کو تفریق کرو تو ہمکو وہ رقبہ حاصل ہوگا کہ تدویر یدیر کی قوس اور دائرہ ساکن کے درمیان واقع ہے اور یہہ قوس ایک قرن سے متصل کے قرن تک کہچی گئی ہے اور دائرہ ساکن وہ ہی جسپر دائرہ متحرک گردش کرتا ہے پس ماحصل یہہ ہے کہ

$$\frac{\pi ص^2}{ط}(3ط + 2ص)$$

اور علی ہذا القیاس تدویر یدیر داخلی میں بھی وہ رقبہ دریافت ہو سکتا ہی جو دائرہ ساکن اور خط منحنی حصہ کے درمیان واقع ہو اور یہہ حصہ ایک قرن سے دوسرے قرن تک کہچا گیا ہو اگر ط بڑا ص سے ہو تو نتیجہ یہہ حاصل ہوگا

$$\frac{\pi ص^2}{ط}(3ط - 2ص)$$

خط منحنی اور اوسکے لف کے درمیان کا رقبہ

(۱۵۷) دفعہ ۱۴۷ کی شکل میں اگر ہم رسی کو یا خط ع ق کو فرض کریں کہ وہ چھوٹے سے زاویہ Δ سہ پر حرکت کرتا ہے تو خط کے دو مقامات اور خط منحنی ل ع کے درمیان جو شکل ہوگے اخر کو اوسے ایک قطعہ دائرہ خیال کر سکتے ہیں اسواسطے اوسکا رقبہ $\frac{1}{2}$ ق^2 Δ سہ ہوگا اسمیں ق = ع ق پس اگر Δ اوس کل رقبہ کو تعبیر کرے

جو خط منحنی اور اوسکے لف اور دو نصف قطر دائرے سے گہر گیا ہے اور یہہ نصف قطر دائرہ موافق سر۱ اور سر۲ کے قیمتون کے لئے گئے ہین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ا = ½ سر۲ مع ق۱ زسر

چونکہ زسر / زصو = ۱ / ق تو اس کو اسطرح لکہہ سکتے ہین کہ

ا = ½ مع ق زصو

حدود غائی صو کی ہین جو سر کی حدود غائی معلوم کے موافق لگی ہین یا ہم اس صورت قانونی کو اسطرح لکہہ سکتے ہین کہ

ا = ½ مع ق زصو / زلد زلد

(۱۵۸) اوپر کی دفعہ کا عمل خط محیل پر کرو

یہان صو = س مس سر بموجب دفعہ ۱۰۹

اسواسطے ق = س قط۲ سر اور ا = ½ مع س۲ وط۴ سر زسر

مع وط۴ سر زسر = مس سر + ⅓ مس۳ سر + س

پس ا معلوم ہوگیا

منحنی مواقع العمود کا رقبہ

(۱۵۹) فرض کرو کہ سطح مستوی خط منحنی مین اوسکے مماس کہچے جائین اور کسی ایک ہی نقطہ سے عمود ان مماسون پر نکالین جائین تو ان مواقع عمود کے نقطون سے جو خط منحنی بنا ہی اوسکو منحنی مواقع العمود کہتے ہین اور جس نقطہ سے عمود نکالے گئے ہین اوسکو مبدء مواقع کہتے ہین اور خط منحنی جسے کہ منحنی مواقع العمود پیدا ہوا ہے منحنی اولی کہلاتا ہے ہم نے اسی منحنی اوسکے اور منحنی مواقع العمود کے بعض ارتباط کا بیان کیا ہے دفعات ۹۰-۹۳ تک دیکہو اب ہم ایک دعوی مختلف خطوط منحنی مواقع العمود کے رقبون کے باب مین بیان کرتی ہین اور مختلف خطوط بہی اسطرح پیدا ہوتی ہین کہ خط منحنی اولی ایک ہی رہے اور مبدء مواقع بدلتا رہتا

خط منحنی مواقع العمود کے رقبہ سے وہ رقبہ مراد ہے جو ایک عمود اسطرح پیدا کرتا ہے جس طرح کہ نقطہ تماس منحنی اولی کی قوس معلوم پیدا کرتا ہے

(۱۶۰) خطوط مواقع العمود جنکا رقبہ معلوم ہے اونکی مبدء تراش مخروطی مین واقع ہوتے ہین اور تراش مخروطی کا مرکز وہی رہتا ہی خواہ رقبہ معلوم کی کچھہ ہی مقدار ہو

فرضکرو کہ ا اوس رقبہ کو تعبیر کرتا ہی جو خاص مبدء مواقع ط سے ہوا اور اَ اوس رقبہ کو تعبیر کرتا ہے جو مبدء مواقع محدد ین قطبیہ لق اور بر بلحاظ طَ کے ہین اور خط منحنی اولے کے کسی مماس پر جو عمود ط سے نکالا جاے اوسے ع سے تعبیر کرو اور اسے مماس پر طَ سے جو عمود نکالا جای اوسکا طول عَ ہے اور فرضکرو کہ سر زاویہ درمیانی ان عمودون اور خط ابتدائی قائم کا ہے تو دفعہ ۷۰ اکیطرح

ا = ½ مع ع^۲ زسر اور اَ = ½ مع عَ^۲ زسر

کلیان حدود غائی معین کے درمیان لیجائین

اب عَ = ع − لق جم (سر − بر) اسواسطے

اَ = ا − مع ع لق جم (سر − بر) زسر + ½ مع لق^۲ جم^۲ (سر − بر) زسر . . . (۱)

فرضکرو کہ لد = لق جم بر اور ی = لق جب بر تو

اَ = ا − (ھ لد + ک ی) + ل لد^۲ + ۲ م لد ی + ن ی^۲ . . . (۲)

اسمین ھ اور ک اور ل اور م اور ن خاص مقادیر ہین جو طَ کے ہر مقام پر مستقل رہتی ہین

اب (۲) سے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ مقام النقاط (لد و ی) کا مطابق قیمت اَ کے تراش مخروطی ہے اور تراشہاے مخروطی اَ کے مختلف قیمتون کے مقرر کرنے سے متحد المرکز پیدا ہوتے ہین

تراش مخروطی اکثر بیضوی ہوگی اسواسطے کہ ل اور م اور ن کی قیمتون کے مندرج کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے

م^۲ − ل ن = [مع جب سر جم سر زسر]^۲ − [مع جم^۲ سر زسر] × [مع جب^۲ سر زسر]

اور یہہ بھی ثابت ہو سکتا ہی کہ بائیں طرف کا جملہ منفی ہے باب چہارم کی ۲۱ مثال دیکھو

اسے معلوم ہو کہ موجب باب سیزدہم ہندسہ بالجبر تراشش مخروطی بیضوی ہے

اگر تراشش مخروطی کا مرکز رسیدہ ہو تو اول درجہ کی رقمین لا اور ی ہے مساوات (۱) سے

غائب ہو جائینگی پس اسطرح بالواسطہ یہہ معلوم ہوتا ہے کہ کوئی مبدء مواقع بھی ایسا ہی کہ

جسمیں ھ = ۰ اور ک = ۰ فرض کرو کہ یہہ مبدء بجاے ط کے مقرر کیا جاے تو

یہہ (۱) سے حاصل ہوتا ہی کہ

ا' = ا + ½ مع لو جم ا (سر - بر) زبر

اور دوسری رقم بائیں طرف مثبت ہی اور ا' ضرور بڑا بہ نسبت ا کے ہی پس مبدء ط

ایسا ہی کہ رقبہ مواقع العمود کو نہایت کم بناتا ہے

ایک خاص صورت میں جسکے اندر خط منحنی اولے احاطہ کیا ہوا خط منحنی ہو تو تراشش مخروطی

دائرہ ہو جائیگی اسواسطے کہ سر کی حدود غائی ۔ اور سر کہ کے درمیان فرض کی گئی ہے پس

اسے یہہ حاصل ہوتا ہے ل = ن اور م = ۰

خط اولے پر نقاط خاص کے موجود ہونے کا اثر اب ہم بیان کرتے ہین اس صورت مین یہہ

واقع ہو سکتا ہے کہ سر ہمیشہ کلیوں کی ادنی حد سے اعلی حد تک زیادہ نہ ہو بلکہ بعض اوقات

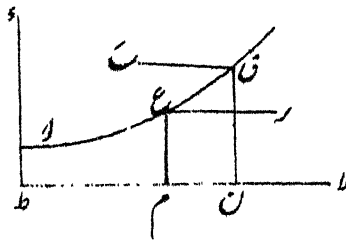
زیادہ ہو اور بعض اوقات کم ہو مثلاً اب فرض کرو کہ سر اول ۔ سے ¼ کہ تک زیادہ

ہوتا ہے اور ¼ کہ سے ½ کہ تک کم ہوتا ہے اور ½ کہ سے ¾ کہ تک زیادہ ہوتا ہے

قیمتین ھ و ک و ل و م و ن کی وہی ہونگین جو اوس حالتین ہوئین کہ سر ہمیشہ ۔ سے ¼ کہ

تک زیادہ ہوتا پس جو رقبہ خط منحنی مواقع العمود کا مرتسم کیا گیا ہے وہ اوس حالتمین کہ

¼ کہ سے ½ کہ تک سر گھٹتا ہے منفی مقدار شمار کیا جائیگا

سطوح مستدیر قائم الزاویہ صور قانونیہ

(۱۶۱) فرضکرو کہ خط منحنی اع ق پر ایک نقطہ معین ا ہے اور نقطہ ع کے محددین لل اور ری ہین اور قوس اع کا طول صو ہی اور خط منحنی محور لا کے گرد چکر کہاتا ہی اور اع کے چکر کہانے سے جو سطح مستدیر پیدا ہوا اوسکے رقبہ کو ص سے تعبیر کرو تو بموجب علم حساب الجزئیات کے دفعہ ۱۳۰ کے

رصے / رصو = ۲ ک ی

اسواسطے ص = مع ۲ ک ی رصو . . . . . (۱)

پس ص = مع ۲ ک ی رصو/رلد رلد . . . . (۲)

اور ص = مع ۲ ک ی رصو/ری ری . . . . (۳)

ان تینون صورتون مین سے جس صورت سے مطلب برآرین تسہیل اور آسانی ہو اوسے اختیار کرو اگر ی باسانی ارقام صو مین بیان ہو جاے تو (۱) کو کام مین لانا چاہیے اگر رصو/ری آسانی سے ارقام ی مین بیان ہو تو (۳) کو کام مین لانا چاہیے لیکن اکثر صورتون مین مطلب برآری مین تسہیل اسمین ہوگی کہ ی اور رصو/رلد کو ارقام لا مین بیان کرین اور (۲) کو کام مین لائین

ہر صورت مین رقبہ سطح کا جو خط منحنی کی کسی قوس کی حرکت سے پیدا ہوا اور یہہ قوس نقاط معینہ کے درمیان واقع ہو اسطرح دریافت ہوگا کہ حدود غائی مخصوص کے درمیان کلی لین

(۱۶۲) اسطوانہ پر دفعہ مذکور کا عمل کرو

فرضکرو کہ خط مستقیم متوازی محور لا کے گرد محور لا کے چکر لگائی تو اسنطح استوانہ مستدیر قائم پیدا ہوگا اور فرض کرو کہ خط متحرک کا محور لا سے فاصلہ ط ہے

تو ء = ط اور $\frac{\text{ز صع}}{\text{ز لا}}$ = ١

پس بموجب مساوات (٢) دفعہ ١٦١ کے

ص = ٢ کہ ∫ ط ز لا = ٢ کہ ط لا + س

فرض کرو کہ خط متحرک کے اوس حصہ کی اطراف کے جو متحرک ہوتا ہے محدد لا١ اور لا٢ ہیں تو سطح جو پیدا ہوگی

= ٢ کہ ط $\int_{\text{لا}_1}^{\text{لا}_2}$ ز لا = ٢ کہ ط (لا٢ − لا١)

(١٦٣) مخروط پر دفعہ مذکور کا عمل کرو

فرض کرو کہ ایک خط مستقیم جو مبدء مین گذرتا ہی اور محور لا پر میلان زاویہ سہ کا رکھتا ہے محور لا کے گرد چکر لگائی تو سطح مستدیر مخروطی پیدا ہوگی کہ

ء = لا مس سہ اور $\frac{\text{ز صع}}{\text{ز لا}}$ = قط سہ

پس مساوات (٢) دفعہ ١٦١ سے

سر = ٢ کہ ∫ مس سہ قط سہ لا ز لا = کہ مس سہ قط سہ لا٢ + س

اسی معلوم ہوا کہ راس سے لا١ اور لا٢ کے فاصلہ پر سطوح نے جو عمود محور پر ہون مخروط تراشا جاے تو سطح مستدیر مخروط ناقص کا رقبہ کہ مس سہ لو ہے

(١٦٤) کرہ پر دفعہ مذکور کا عمل کرو

فرض کرو کہ مساوات ء٢ = ط٢ − لا٢ سے دائرہ معلوم ہوتا ہے اور وہ محور لا کے گرد دور کرتا ہے تو یہان

$\frac{\text{ز ء}}{\text{ز لا}}$ = − $\frac{\text{لا}}{\text{ء}}$

اور $\frac{\text{ز صع}}{\text{ز لا}}$ = $\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{\text{ز ء}}{\text{ز لا}}\right)^2\right\}}$ = $\sqrt{\left(1 + \frac{\text{لا}^2}{\text{ء}^2}\right)}$ = $\frac{\text{ط}}{\text{ء}}$

اسی معلوم کہ مساوات (٢) دفعہ ١٦١ کی موافق

صہ = ٢ کہ ∫ ء $\frac{\text{ط}}{\text{ء}}$ ز لا = ٢ کہ ط ∫ ز لا = ٢ کہ ط لا + س

پس سطح مستدیر جو اون سطوح کے درمیان کہ لا = لا۱ اور لا = لا۲ سے مشخص ہوتی ہین

۲ کہ ط (لا۲ − لا۱)

اسی سے ثابت ہوا کہ رقبہ منطقہ کرہ کا موقوف منطقہ کے ارتفاع اور کرہ کے نصف قطر پر ہوتا ہے

اور وہ برابر اوس رقبہ کے ہوتا ہے جو اون سطوح مستوی سی کہ منطقہ کو احاطہ کئی ہوئی ہین اوس

اسطوانہ سے قطع کرتی ہین کہ جسکا محور سطوح مستوی پر عمود ہے اور وہ خود کرہ کے اوپر بنا ہوا ہے

پس سطح مستدیر کل کرہ کی ۴ کہ ط۲ ہے یہہ نتایج بڑے مہتم بالشان ہین

(۱۶۵) کرہ بیضوی پر دفعہ مذکور کا عمل کرو

فرض کرو کہ بیضوی معلوم ط۲ ی۲ + ص۲ لا۲ = ط۲ ص۲ محور لا کے گرد چکر لگائی اور محور منطبق بیضوی کے محور کلان پر فرض کیا جائے تو یہان

زی / زلا = − ص۲ لا / ط۲ ی

اور زصو / زلا = ی (۱ + ص۴ لا۲ / ط۴ ی۲)^½ = ص (ط۴ − ی۲ لا۲)^½ / ط۲

اسی معلوم ہوا کہ مساوات (۲) دفعہ ۱۶۱ مین

ص = ۲ کہ ص / ط۲ مع (ط۴ − ی۲ لا۲)^½ زلا = ۲ کہ ص ی / ط مع (ط۴/ی۲ − لا۲)^½

= کہ ص ی / ط [لا (ط۴/ی۲ − لا۲)^½ + ط۴/ی۲ جب^{-۱} ی لا / ط۲]

اب کلی کے بیچ مین لا کی حدود رکھیں ۰ اور ط لین تو سطح مستدیر جو ربعہ بیضوی کی حرکت سی پیدا ہوتی ہے حاصل ہوجائینگے اسی یہہ حاصل ہوتا ہے

کہ ط ص [(۱ − ی۲)^½ + جب^{-۱} ی / ی]

(۱۶۶) دوسری مثال کے واسطے فرض کرو کہ

ی = س/۲ (ی^{لا/س} + ی^{−لا/س})

محور لا کے گرد چکر لگاتا ہے

یہان اگر اوس نقطہ سی جہان لا = ۰ کے پیمایش کریں تو صو = س/۲ (ی^{لا/س} − ی^{−لا/س}) بموجب دفعہ ۔۔۔ کے

بس ہم دیکھتے ہین کہ ی۲ = صو۲ + س۲ اس صورت مین دفعہ ۱۶۱ کے تینون صورتون مین جسکو چاہین کام مین لائین لیکن (۲) کے استعمال مین آسانی ہوگی

(۱۶۷) فرض کرو کہ ایک خط منحنی کی مساوات ی = مح (لا) ہی اور دوسری کی مساوات ی = صح (لا) ہے اور دونو خط منحنی محور لا کے گرد چکر لگاتے ہین اور جو قوسین کہ نقاط معینہ سے دونو خطوط منحنی مین اوس نقطہ تک پیمائش ہوتی ہین جسکا محدد لا ہے اوسکا طول صو۱ اور صو۲ ہین اور مبدء سے لا۱ اور لا۲ کے فاصلون پر جو دو سطحین عمود محور لا پر ہون اونکے درمیانی سطوح کے رقبون کے مجموعہ کو صر تعبیر کرتا ہے تو بموجب دفعہ ۱۶۱ کے

صر = ۲ کہ ∫لا۲ لا۱ [مح (لا) ز صو۱ / ز لا + صح (لا) ز صو۲ / ز لا] ز لا

ایک یہان صورت یہہ فرض کرو کہ ھر ایک خط منحنی ہی جو خط مستقیم ی = ط سے تنصیف ہوتا ہے بس ی = ط + ھر (لا) فرع بالا کے واسطے اور ی = ط - ھر (لا) کے فرع پائین کے لئے

اسیے معلوم ہوا کہ ز صو۱ / ز لا = ز صو۲ / ز لا

اور صر = ۴ کہ ط ∫لا۲ لا۱ ز صو۱ / ز لا ز لا = ۴ کہ ط ∫ ز صو۱

حدود غائی صو۱ کی موافق لا کی حدود غائی کی لی گئی ہین

اسی معلوم ہوا کہ اگر کوئی کامل خط منحنی ہی اور ایک خط مستقیم سے تنصیف ہوتا ہے اور ایک محور کے گرد چکر لگاتا ہے اور یہہ محور پہلے خط سے ط کے فاصلہ پر واقع ہی اور خط منحنی کو قطع نہین کرتا تو کل سطح مستدیر جو پیدا ہوگی اوسکا رقبہ برابر ہوگا حاصل ضرب طول خط منحنی اور ۲ کہ ط کے

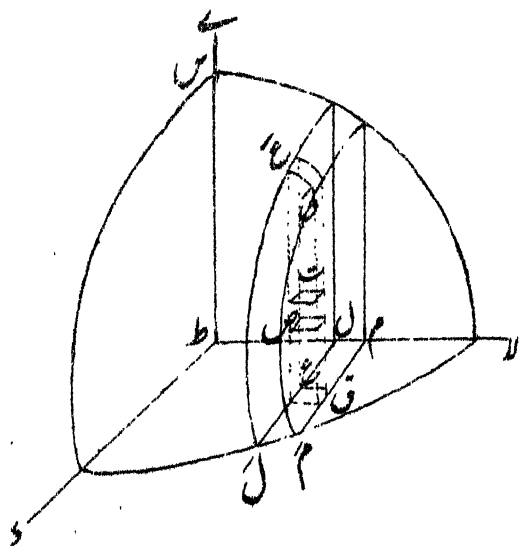
مثلاً فرض کرو کہ دائرہ مساوات

(لا - ھر)۲ + (ی - ک)۲ - س۲ = ۰

سے معلوم ہوتا ہے یہان رقبہ کل سطح مستدیر جو محور لا کے گرد دائرہ کے چکر کہانے سے پیدا ہوتی ہے ۲ کہ ک × ۲ کہ س ہوگی

اس مثال مین کچھ دقت نہین کہ سطح مستدیر کے دونو حصون کو جدا جدا دریافت کرلین

سطح بیرونی اور کلی تمثاہ

(۱۷۰) فرض کرو کہ کسی سطح کے نقطہ ع کے لا اور د اور ے محددین ہیں اور لا + ∆ لا اور د + ∆ د اور ے + ∆ ے محددین متصل کے نقطہ ق کے ہیں

ع سے ایک سطح متوازی سطح (لا د) کے اور ایک سطح متوازی سطح (د ے) کے اور نیز ق سے ایک سطح متوازی (لا ے) کے اور ایک سطح متوازی سطح (د ے) کے کہینچو تو ان سطوح کے درمیان ایک جز ترکیبی ع ق سطح مستدیر کا واقع ہوگا اور اس جز ترکیبی کا سطح (لا د) پر قائم الزاویہ ع ق ہوگا فرض کرو کہ سطح مستوی مماس سطح بیرونی کے نقطہ ع پر سطح مستوی (لا د) کے ساتھ میلان زاویہ ن کا رکھتی ہے تو مجسمات کے علم ہندسہ کے موافق یہہ معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{قطلہ} = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\text{ن ے}}{\text{ن لا}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ن ے}}{\text{ن د}}\right)^2\right]}$$

اسمین $\frac{ز ے}{ز لا}$ اور $\frac{ز ے}{ز ی}$ مساوات معلوم سطح بیرونی سے دریافت ہو سکتے ہین

اب رقبہ ع ق کا ∆ لا ∆ ی ہی اسی معلوم ہوا کہ مجسمات کے علم ہندسہ کے موافق سطح کہ ع پر مس کرتی ہے اور جسکا ظلہ ع ق ہے اوسکی جز ترکیبی کا رقبہ ∆ لا ∆ ی قط لر ہے اب ہم فرض کرینگے کہ رقم ∆ لا ∆ ی قط لر کے متماثل جو ارقام ہین اونکے مجموعہ کے حد غائی موافق لا اور ی کے تمام قیمتوں سکیو حدود غائی معینہ کے درمیان واقع ہین رقبہ سطح بیرونی کا موافق ان حدود غائی کے ہے اس سطح کو ص سے تعبیر کرو تو

$$ص = مج مج \sqrt{\left[۱ + \left(\frac{ز ے}{ز لا}\right)^۲ + \left(\frac{ز ے}{ز ی}\right)^۲ \right]} \; ز لا ز ی$$

ان کی حدود غائی موقوف سطح بیرونی کے حصہ مذکور پر ہے

(۱۷۱) دفعہ مذکور مین جو بات فرض کی ہی اوسکی حقیقت سمجھنے کے لئے طالب علم کو چاہیے کہ وہ علم حساب الجزئیات کی دفعہ ۳۰۸ کو دیکھو

(۱۷۲) کرہ پر دفعہ مذکور کا عمل کرو

فرض کرو کہ کرہ جسکی مساوات

$$لا^۲ + ی^۲ + ے^۲ = ط^۲$$

ہے اوسکے اٹھوین حصہ کی سطح مستدیر دریافت کرنی ہے

یہان $\frac{ز ے}{ز لا} = - \frac{لا}{ے}$ اور $\frac{ز ے}{ز ی} = - \frac{ی}{ے}$

$$پس \; ص = مج مج \sqrt{\left(۱ + \frac{لا^۲}{ے^۲} + \frac{ی^۲}{ے^۲} \right)} \; ز لا ز ی = مج مج \frac{ط \; ز لا ز ی}{\sqrt{(ط^۲ - لا^۲ - ی^۲)}}$$

اب شکل مین فرض کرو کہ ط ل = لا اور ل ل' کو بجائی $ی_۱$ کے رکھو تو $ی_۱ = \sqrt{(ط^۲ - لا^۲)}$ اسواسطے کہ مساوات سطح بیرونی مین ے = ۰ کے فرض کرنے سے قیمت $ی_۱$ کی حاصل ہوتی ہے اب اگر ہم بلحاظ ی کے کلی حدود غائی ۰ اور $ی_۱$ کے درمیان لیوین تو ہم کو چاہیے کہ تمام اجزاء ترکیبی کا مجموعہ لین جو اوس قطعہ مین واقع ہے جسکا ظلہ ل م م' ل' سطح (لا ی) پر ہے اب

$$\frac{\text{ک}}{۲} = \int \int \frac{\text{ز ی}}{\sqrt{(\text{ط}^۲ - \text{لا}^۲ - \text{ی}^۲)}} = \int \int \frac{\text{ز ی}}{\sqrt{(\text{ی}_۱^۲ - \text{ی}^۲)}}$$

بس $\text{ص} = \frac{\text{ک ط}}{۲} \int \text{ز لا}$

اگر ہم کلی بلحاظ لا کے ۰ سے ط تک لین تو ہم تمام اون قطعات کو جمع کرین جو اوس سطح بیرونی مین واقع ہین کہ جسکا ظلہ ط ا ب ہے بس $\frac{\text{ک ط}^۲}{۲}$ نتیجہ مطلوب ہے اسواسطے کل سطح مستدیر کرہ کی ۴ ک ط^۲ ہے

اگر ہم بلحاظ لا کے اول کلی لین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ص} = \int_۰^{\text{ط}} \int^{\text{لا}_۱} \frac{\text{ط ز ی ز لا}}{\sqrt{(\text{ط}^۲ - \text{لا}^۲ - \text{ی}^۲)}}$$

اسمین $\text{لا}_۱ = \sqrt{(\text{ط}^۲ - \text{ی}^۲)}$

ایک اور مثال یہہ ہی کہ سطح بیرونی کے اوس حصہ کا رقبہ دریافت کرو اس مساوات سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{ے}^۲ + (\text{لا جم سہ} + \text{ی جب سہ})^۲ - \text{ط}^۲ = ۰$$

محددین کے مثبت خانون مین واقع ہے یہہ سطح مستدیر اسطوانہ مدور قائم کی ہے اور اوسکا محور خط مستقیم ہی جو ے = ۰ اور لا جم سہ + ی جب سر = ۰ سے تحقیق ہوتا ہے اور ط نصف قطر مدور قطعہ کا ہے یہان

$$\frac{\text{ز ے}}{\text{ز لا}} = - \frac{\text{جم سہ (لا جم سہ + ی جب سہ)}}{\text{ے}}$$

$$\frac{\text{ز ے}}{\text{ز ی}} = - \frac{\text{جب سہ (لا جم سہ + ی جب سہ)}}{\text{ے}}$$

$$\text{ص} = \int\int \frac{\text{ط ز لا ز ی}}{\text{ے}} = \int\int \frac{\text{ط ز لا ز ی}}{\sqrt{[\text{ط}^۲ - (\text{لا جم سہ} + \text{ط جب سہ})^۲]}}$$

بس محدود سطح (لا ی) سطح بیرونی کو خطوط مستقیم ط = ± (لا جم سہ + ی جب سہ) پر قطع کرتی ہے اگر اوپر کی علامت لین تو خط مستقیم سطح (لا ی) کے بنسبت ربعہ مین واقع ہوگا ص کی قیمت دریافت کرنے کے لئے ہم اول بلحاظ ی کے احدود غایتی ی = ۰ اور ی = (ط - لا جم سہ) قم سہ کے لیتے ہین اب

$$\int \frac{\text{ز ی}}{\sqrt{[\text{ط}^۲ - (\text{لا جم سہ} + \text{ی جب سہ})^۲]}} = \frac{۱}{\text{جب سہ}} \text{جبا} \frac{\text{لا جم سہ} + \text{ی جب سہ}}{\text{ط}}$$

اسکو حدود غائی معین کے درمیان لو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{1}{جب\ ہہ}\left(\frac{\pi}{2} - جب^{-1}\frac{لا\ جم\ ہہ}{ط}\right)$$

اسواسطے ص ر $= \frac{ط}{جب\ ہہ}$ مع $\left[\frac{\pi}{2} - جب^{-1}\frac{لا\ جم\ ہہ}{ط}\right]$ ز لا

اور حدود غائی کلی کی. اور جم ہہ $\frac{ط}{}$ میں اسے ہم کو دریافت ہوگا.

$$ص\ ر = \frac{\pi ط^2}{جب\ ہہ\ جم\ ہہ}$$

(۱۷۳) یہہ بات بتلانے کے قابل ہے کہ دو مختلف سطوح بیرونی میں اجزاء ترکیبی متناظر متساوی ہوسکتے ہیں مثلاً سطوح جو $۲ ط ے = لا^2 + ز^2$

اور $ط ے = لا ز$ سے تشخیص ہوتی ہیں اونمیں ہر صورت میں

$$\left(\frac{ز ے}{ز لا}\right)^2 + \left(\frac{ز ے}{ز ز}\right)^2 = \frac{لا^2 + ز^2}{ط^2}$$

یوکر صاحب نے اسپر بہت بحث لکھی ہی اور اونھونے ایسے سطوح کا نام سطوح متفقہ رکھا ہے

یہہ سطوح بیرونی متفقہ ہیں کہ

مخروط $(ے - س)^2 = \left[(لا - ط)^2 + (ز - ص)^2\right]$ مس² لر

اور سطح مستوی $لا\ جم\ ہہ + ز\ جم\ صہ + ے\ جم\ لر = ع$

اور یہہ سطوح بیرونی جو اون مساواتوں سے تحقیق ہوتے ہیں متفقہ ہیں

$$۲ ط ے = لا^2 + ز^2$$

$$۲ ط ے = (لا^2 - ز^2) س - ۴ س لا ز \div (۱ - س^2)$$

$$۲ ط ے = \left[(لا^2 + ز^2)^2 - ۴ س لا ز + ۲ س (لا^2 - ز^2) + س^2 + س^4\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$۲ ط ے = (لا^2 - ز^2)\ جم\ بر + ۲ لا ز\ جب\ بر$$ مع مج (بر) ز بر

اسمیں مج (بر) جملہ بر کا ہے اور بر جملہ لا کا ہے اور ز کا

$$۲ لا ز\ جم\ بر - (لا^2 - ز^2)\ جب\ بر = مج(ز)$$

سے تشخیص ہوتا ہے

(۱۷۴) سطح بیرونی کے کسی نقطہ پر سطح متماسہ کا ظلہ جو قائم الزاویہ ۵ لا ۵ ی لیتے ہیں
اوسکی جگہ ایسے سطح لین کہ جسکا ظلہ قطبی جز ترکیبی لق ۵ سر ۵ لق ہو
تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ص = مع مع قط لمر لق ز بر ز لق

مثلاً فرض کرو کہ ہم کو رقبہ سطح بیرونی لا ی = ط ے کا دریافت کرنا ہے
اور یہہ سطح لا² + ی² = س² سے قطع ہوئی ہے یہان
قط لر = √(۱ + لا²/ط² + ی²/ط²) = √(ط² + لق²)/ط کیونکہ لا² + ی² = لق²
پس ص = ۲ مع س مع √(ط² + لق²)/ط لق ز بر ز لق = ۲ط/۳ [(س² + ط²)^(۳/۲) - ط³]
(۱۷۵) فرض کرو کہ لا = لق جب بر جم سر اور ی = لق جب بر جب سر اور ے = لق جم بر
پس لق اور بر اور سر قطبی محددین کسی نقطہ کے سطح مین ہین تو ہم بعد ازین ثابت کرینگے کہ مساوات

ص = مع مع √[۱ + (ز ے/ز لا)² + (ز ے/ز ی)²] ز لا ز ی

کی ہیئت بدل کر یہہ مساوات بن سکتی ہے کہ

ص = مع مع √[لق² جب² بر + (ز لق/ز بر)² جب² بر + (ز لق/ز سر)²] لق ز بر ز سر

اثبات ہندسیہ بھی اسکا بعض کتابون لکھا ہی اور یہہ بھی یاد رکھنا چاہیئے کہ اس صورت
قانونیہ لق = √(لا² + ی² + ے²) مین دفعیہ ۲۴ مین لق تعبیر √(لا² + ی²) ہوا ہے

کلیات کے تقریبی قیمتین

(۱۷۶) فرض کرو کہ ی جملہ لا کا ہے اور ط مع س ی ز لا مطلوب ہے اگر غیر محدود کلی مع ی ز لا کے
معلوم ہو تو فوراً محدود کلی معلوم ہوجائیگی اور اگر غیر محدود کلی مجہول ہو تو بھی تقریبی قیمت
محدود کلی کی معلوم ہو سکتی ہی اس عمل تقرب کی تشریح اسطرح سے خوب ہوتی ہے کہ ی تو
معین کسی خط منحنی کا فرض کرین تو ط مع س ی ز ی ایک خاص رقبہ کو تعبیر کریگا س - ط کو
ایسے ن برابر حصون مین تقسیم کرو کہ ہر یک حصہ ح ہو اور ابتدائی انتہائی معین کے درمیان
ن - ۱ معین برابر برابر فاصلون پر کہینچو اور معینون کو ی۱ اور ی۲ ... ی ن اور ی ن+۱ سے تعبیر کرو

پس اب ہم یہہ مقرر کر سکتے ہین کہ

ع (ی۱ + ی۲ + ۰۰۰ + ین)

رقبہ مطلوب کی تقریبی قیمت ہے

یا

ع (ی۲ + ی۳ + ۰۰۰ + ین + ۱)

تقریبی قیمت ہے

اور ایک اور طرح سے بہی تقریبی قیمت حاصل کر سکتے ہین کہ روین اور ر + ۱ اوین معینون کے اطراف مین خط ملائین تو ایک ذوزنقہ بن جایگا جسکا رقبہ (یر + یر+۱) ع/۲ ہوگا اور ایسی سطوح ذوزنقہ کے مجموعہ سے تقریبی قیمت

ع [ی۱/۲ + ی۲ + ی۳ + ۰۰۰ + ین + ین+۱/۲]

رقبہ مطلوب کی حاصل ہوگی

نفس الامر مین یہہ ماحصل مجموعہ پہلی دو ماحصل کا ہے یہہ بہی ظاہر ہے کہ ن کو کافی بڑہا کر تقریبی قیمت کو جتنا قریب چاہین لا سکتے ہین

ایک اور ترکیب تقریبی قیمت کے حاصل کرنی کی یہہ ہے کہ فرض کرو ایک قریب البیضوی مرتسم ہو جسکا محور متوازی محور ی کے ہو اور ی۱ اور ی۲ اور ی۳ متساوی الابعاد معین ہین اور ی۱ اور ی۲ کے درمیان بعد ع ہی اور اسواسطے ی۲ اور ی۳ کے درمیان بہی یہی بعد ہوگا تو یہہ ثابت ہو سکتا ہے کہ قریب البیضوی اور محور لا اور دو اطراف کی معینون کے درمیان رقبہ

ع/۳ (ی۱ + ۴ ی۲ + ی۳)

ہے اور یہہ شکل سے تو بہت آسانی سے ثابت ہوتا ہے کیونکہ اس قبہ مین ایک ذوزنقہ ہے اور ایک قطعہ قریب البیضوی ہے اور اسکا رقبہ دفعہ ۱۴۳ کے موافق دریافت ہو سکتا ہے

اب فرض کرو کہ ن جفت ہی تو رقبہ جسکا تخمینہ کرنا مطلوب ہے جفت ٹکرون مین تقسیم ہوگا پس اول دو ٹکڑون کے مد قبون کو فرض کرو کہ

$$\frac{ھ}{۳}\left(ی_۱ + ۴ی_۲ + ی_۳\right)$$

ہے تو رقبہ تیسرے اور چوتھی ٹکڑے کا

$$\frac{ھ}{۳}\left(ی_۳ + ۴ی_۴ + ی_۵\right)$$ ہے

اور علی ہذا القیاس بس آخرکار یہہ نتیجہ تقریبی حاصل ہوگا کہ

$$\frac{ھ}{۳}\left(ی_۱ + ۲(ی_۳ + ی_۵ + \cdots + ی_{ن-۱}) + ی_{ن+۱} + ۴(ی_۲ + ی_۴ + \cdots + ی_ن)\right)$$

بس اسی یہہ قاعدہ استخراج ہوا کہ اول اور آخر معینون کو جمع کرو اور طاق معینون کے مجموعہ کو دوچند کرو اور جفت معینون کے مجموعہ کو چوچند کرو اور ان سب مجموعون کو جمع کرکے معینون کے بعد مشترک کی ایک تہائی مین ضرب دو اس قاعدہ کو سمپسن کا قاعدہ کہتے ہین

(۱۷۷) دفعہ گذشتہ کی تحقیقات مین ہم نے دفعہ ۱۷۳ کی طرف رجوع کی تھی لیکن اوسکی جگہہ ہم اس ترکیب کو کام مین لاسکتے ہین فرض کرو کہ مساوات خط منحنی کی $ی = ا + ب لا + س لا^۲$ ہے جس مین ا اور ب اور س مقادیر مستقل ہین اور $ی_۱$ اور $ی_۲$ اور $ی_۳$ قیمتین ی کی لا کی ۰ و ھ و ۲ھ کے قیمتون کے مطابق ہین تو

$ی_۱ = ا$ اور $ی_۲ = ا + ب ھ + س ھ^۲$ اور $ی_۳ = ا + ۲ب ھ + ۴س ھ^۲$

ان مساواتون سے ا اور ب ھ اور $س ھ^۲$ کو ارقام $ی_۱$ اور $ی_۲$ اور $ی_۳$ مین بیان کرسکتے ہین

اور خط منحنی اور محور لا اور دو اطراف معینون کے درمیان رقبہ

$$= \int_۰^{۲ھ} ی \, ز لا = ۲ا ھ + ۲ب ھ^۲ + \frac{۸س ھ^۳}{۳}$$

ا اور ب ھ اور $س ھ^۲$ کی قیمتون کو رکھو تو اس صورت بیانیہ کی یہہ صورت ہوجائیگی کہ

$$\frac{ھ}{۳}\left(ی_۱ + ۴ی_۲ + ی_۳\right)$$

اور معین متساوی الابعاد مین سے ہین اول کے لا = ط کے بعد پر بجای لا = ۰ کے کھینچی گئی ہوتی تو یہی نتیجہ حاصل ہوتا اسواسطی کہ $لا = ط + لا'$ مساوات خط منحنی مین رکھو تو مساوات یہہ ہوجائیگی کہ

ی = ع + ق لا + س لا^{2}

اسمین ع اور ق اور س مقادیر مستقل ہین اور ی$_1$ و ی$_2$ و ی$_3$ قیمتین ی کی مطابق لا کے ۰ و ھ و ۲ ھ کے قیمتون کے ہونگین پس عمل اور نتیجہ موافق سابق کے حاصل ہوگا

اگر ہم ی = ا + ب لا + س لا^{2} + د لا^{3} مساوات خط منحنی کی مقرر کرین تو تین مساواتین حاصل ہونگین جنمین چار مقادیر ا و ب ھ و س ھ^{2} اور د ھ^{3} ی$_1$ و ی$_2$ و ی$_3$ کے ساتھہ مربوط ہونگین اسواسطے ان چار مقادیر کی تشخیص کرسکتے ہین یہہ بات قابل لکھنے کی ہے کہ رقبہ اب بہی اوسی صورت قانونیہ سے تعبیر ہوگا جو اوپر لکھی ہے اسواسطے کہ ہم کو یہہ حاصل ہوگا

ھ/۳ (ی$_1$ + ۴ ی$_2$ + ی$_3$) = ۲ ا ھ + ۲ ب ھ^{2} + ۸ س ھ^{3}/۳ + ۴ د ھ^{4}

اور یہہ برابر ہے

۲ ھ∫ (ا + ب لا + س لا^{2} + د لا^{3}) ز لا

اب اسی صورت بیانیہ کے متشابہ ایک صورت بیانیہ کی تحقیق کرتے ہین جنمین چار معین متساوی البعد معلوم ہین فرض کرو کہ خط منحنی کی مساوات ی = ا + ب لا + س لا^{2} + د لا^{3} ہے اور ی کی قیمتین ی$_1$ و ی$_2$ و ی$_3$ و ی$_4$ مطابق لا کی ۰ و ھ و ۲ ھ و ۳ ھ قیمتون کے ہین تو

ی$_1$ = ا

ی$_2$ = ا + ب ھ + س ھ^{2} + د ھ^{3}

ی$_3$ = ا + ۲ ب ھ + ۴ س ھ^{2} + ۸ د ھ^{3}

ی$_4$ = ا + ۳ ب ھ + ۹ س ھ^{2} + ۲۷ د ھ^{3}

ان مساواتون سے ا اور ب ھ اور س ھ^{2} اور د ھ^{3} کو ارقام ی$_1$ اور ی$_2$ اور ی$_3$ اور ی$_4$ مین دریافت کرسکتے ہین خط منحنی اور محور لا اور دو معین اطراف کے درمیان رقبہ

= ۳ھ∫ ی ز لا = ۳ ا ھ + ۹ ب ھ^{2}/۲ + ۹ س ھ^{3} + ۸۱ د ھ^{4}/۴

ا اور ب اور س ھ^{2} اور د ھ^{3} کی قیمتون کو رکھ دو تو اس صورت بیانیہ کی یہہ صورت بن جائیگی

$$\frac{۳ص}{۸}\left(ع_۱ + ۳ع_۲ + ۳ع_۳ + ع_۴\right)$$

یہہ حاصل جناب نیوٹن صاحب نے لکہا ہے

دفعہ ۱۶۷ کے اخر بیان کے مطابق عمل کرنے سے ہم کو یہہ قاعدہ تقریبی رقبہ کے دریافت کرنیکا معلوم ہوگا کہ کل رقبہ کی ایسی برابر حصوں مین تقسیم کرو کہ اضعاف تین کا ہو اور اول معین اور اخر معین کو جمع کرو اور تیسری معین کو باستثنا اول اور اخر کے باہم جمع کرکے دو چند کرو اور باقی اور معینوں کے مجموعہ کا سہ چند لو اور پہر ان مجموعوں کو یکجا کرکے حاصل کو معینوں کے بعد مشترک کے تین اٹہوین حصہ مین ضرب دو

امثلہ

(۱) اگر محل اور محور لا اور محور ی اور قوس صو کے ایکطرف کے معین کے درمیان جو رقبہ واقع ہو وہ اسے تعبیر ہو تو ثابت کرو کہ ا = س جو قوس صو خط منحنی کے سب سے نیچے کے نقطہ سے شروع ہوتی ہے

(۲) خط منحنی

$$\left(\frac{لا}{ط}\right)^{\frac{۲}{۳}} + \left(\frac{ی}{ص}\right)^{\frac{۲}{۳}} = ۱$$

کا کل رقبہ $\frac{۳پ}{۸}$ کہ ط ص ہی (کلی لا = ء جم^۳ سر کے مقرر کرنے سے بھی نکال سکتی ہین)

(۳) خط منحنی ی (لا^۲ + ط^۲) = س^۲ (ط − لا) کا لا = ۰ سے لا = ط تک رقبہ

س^۲ ($\frac{پ}{۴}$ − $\frac{۱}{۲}$ لوگ ۲) ہے

(۴) خط منحنی ی^۲ لا = ۴ ط^۲ (۲ط − لا) اور اوسکے ممتنع الملاقات کے درمیان کل رقبہ دریافت کرو حاصل ۴ پ ط^۲

(۵) خط منحنی ی^۲ (لا^۲ + ط^۲) = ط^۲ لا^۲ اور اوسکے ممتنع الملاقات کی درمیان کل رقبہ دریافت کرو

حاصل ۴ ط^۲

(۶) خط منحنی ی^۲ = $\frac{لا^۲(ط + لا)}{ط − لا}$ کے حلقہ کا رقبہ دریافت کرو

(۷) خط منحنی $ی^۲ = \frac{لا^۲ (ط + لا)}{ط - لا}$ اور خط ممتنع الملاقات لا = ط سے جو رقبہ محدود ہو اوسے دریافت کرو اور حلقہ کی خاصیت ہے۔ ماحصل ۲ $ط^۲$ (۱ + $\frac{ک}{۴}$)

(۸) خط منحنی $ی^۲$ (۲ط - لا) = $لا^۳$ اور اوسکے ممتنع الملاقات کے درمیان کل رقبہ دریافت کرو

ماحصل ۳ کہ $ط^۲$

(۹) خط منحنی (ی - لا)^۲ = $ط^۲$ - $لا^۲$ کا کل رقبہ دریافت کرو ماحصل کہ $ط^۲$

(۱۰) خطوط منحنی $ی^۲$ - ۴ ط لا = ۰ اور $لا^۲$ - ۴ ط ی = ۰ کے درمیان جو رقبہ واقع ہو اوسے دریافت کرو

ماحصل $\frac{۱۶ ط^۲}{۳}$

(۱۱) خط منحنی $ط^۴ ی^۲ + ص^۲ لا^۴ = ط^۲ ص^۲ لا^۲$ کا کل رقبہ دریافت کرو

ماحصل $\frac{۴}{۳}$ ط ص

(۱۲) خط منحنی $ط^۲ ی^۲ = لا^۲ (ط^۲ - لا^۲)$ کے حلقہ کا رقبہ دریافت کرو ماحصل $\frac{۴ ط^۲}{۳}$

(۱۳) خط منحنی جسکا مماس ایک خط معلوم کی برابر ہوتا ہے اوسکے اور محور لا اور خط ممتنع الملاقات کے درمیان جو رقبہ واقع ہو اوسکو دریافت کرو (دفعات ۱۰۰ و ۱۳۴ دیکھو) ماحصل کہ $\frac{ص^۲}{۴}$

(۱۴) خط منحنی $ی^۲ (ط^۲ + لا^۲) = لا^۲ (ط^۲ - لا^۲)$ کے حلقہ کا رقبہ دریافت کرو

ماحصل $\frac{ط^۲}{۲}$ (کہ - ۲)

(۱۵) خط منحنی ۱۶ $ط^۴ ی^۲ = ص^۲ لا^۲ (ط^۲ - ۲ ط لا)$ کے حلقہ کا رقبہ دریافت کرو ماحصل $\frac{ط ص}{۳۰}$

(۱۶) خط منحنی ۲ $ی^۲ (ط^۲ + لا^۲) = (ط^۲ - لا^۲)^۲$ کے حلقہ کا رقبہ دریافت کرو

ماحصل $ط^۲$ [۳ √۲ لوک (۱ + √۲) - ۲]

(۱۷) خط منحنی ۲ $ی^۲ (ط^۲ + لا^۲)$ - ۴ ط ی $(ط^۲ - لا^۲)$ + $(ط^۲ - لا^۲)^۲$ = ۰ کا کل رقبہ دریافت کرو

ماحصل $ط^۲$ کہ (۴ - $\frac{۵ √۲}{۲}$)

(۱۸) رقبہ خط منحنی ی = ص جب $\frac{لا}{ط}$ لوک جب $\frac{لا}{ط}$ کا

لا = ۰ سے لا = ط کہ تک رقبہ دریافت کرو ماحصل ۲ ط ص (۱ - لوک ۲)

(۱۹) خط منحنی ی = (لا/ط)^ن کا رقبہ درمیان لا = س اور لا = صہ کو دریافت کرو اور حاصل سے رقبہ بعید البیضوی لا ی = ط² کا انہیں حدود نمائی کے درمیان دریافت کرو

(۲۰) بیضوی جبلی مساوات

ط لا² + ۲ ص لا ی + س ی² = ۱ ہی اوسکا رقبہ دریافت کرو حاصل ہے کہ π / (طس − ص²)

(۲۱) خط منحنی لو² = ط² جم ۲ بر کے حلقہ کا رقبہ دریافت کرو حاصل ط²/۲

(۲۲) خط منحنی لو = ط جب ن بر کے تمام حلقوں کے درمیان جو رقبہ واقع ہو اوسی دریافت کرو

حاصل کہ πط²/۴ اگر ن طاق ہو اور کہ πط²/۲ اگر ن جفت ہو

(۲۳) خط منحنی لو = ط جم ن بر اور لو = ط کے درمیان جو رقبہ ہو اوسے دریافت کرو

(۲۴) خط منحنی لو² جم بر = ط² جب ۳ بر کے حلقہ کا رقبہ دریافت کرو

حاصل ۳ط²/۴ − ط²/۲ لوگ ۲

(۲۵) خط منحنی لو = ط (جم ۲ بر + جب ۲ بر) کا کل رقبہ دریافت کرو

حاصل کہ πط²

(۲۶) خط منحنی (لا² + ی²)² = ۴ ط² لا² ی² کے حلقہ کا رقبہ دریافت کرو

حاصل کہ πط²/۲

(۲۷) خط منحنی (لا² + ی²)² = ۴ ط² لا² + ۴ ص² ی² کا کل رقبہ دریافت کرو حاصل ہے کہ π (ط² + ص²)

(۲۸) خط منحنی لا²/ط² + ی²/ص² = ۱/س² (لا²/ط² + ی²/ص²)² کا کل رقبہ دریافت کرو

حاصل کہ πس² / ۲طص (ط² + ص²)

(۲۹) خط منحنی ی³ − ۳ ط لا ی + لا³ = ۰ کے حلقہ کا رقبہ دریافت کرو

حاصل ۳ط²/۲

(۳۰) خط منحنی لو جم بر = ط جم ۲ بر کے حلقہ کا رقبہ دریافت کرو

حاصل (۲ − π/۲) ط²

(۳۱) خط منحنی لو = ط² / (ط² − ص²) جم ۲ بر + ص جم بر

ط بٹرا ص سے ہے ما حصل $\frac{ک ط^۳}{۱(ط^۲ - ص^۲)} + \frac{ک ص^۲}{۲}$

(۳۲) لوکارتمی خط پیچان کا رقبہ خط منحنی اور دو نصف اقطار دائرہ کے درمیان جو قطب سے کھینچے ہیں دریافت کرو

(۳۳) خط منحنی کنکوئیڈ نیس لق = ط + س قم بر اور دو نصف اقطار دائر کے درمیان رقبہ دریافت کرو اور یہہ نصف قطر قطب سے کھینچی گئی ہیں

(۳۴) بیضوی میں خط منحنی اور دو نصف اقطار دائر کے درمیان رقبہ دریافت کرو اور یہہ نصف قطر

(۳۵) قریب البیضوی میں خط منحنی اور دو نصف اقطار دائر کے درمیان رقبہ دریافت کرو اور یہہ نصف قطر اس سے کھینچے گئے ہیں

(۳۶) خط منحنی لق = ط (قطا بر + مس بر) اور اوسکی خط ممتنع الملاقات لق جم بر = ۲ ط کے درمیان جو رقبہ ہو اوسکو دریافت کرو ماحصل $(\frac{ک}{۲} + ۲) ط^۲$

(۳۷) خط منحنی لق = ط (۲ جم بر + ۱) کا کل رقبہ $ط^۲ (۲ ک + \frac{۳ \sqrt{۳}}{۲})$ ہی اور حلقہ اندرونی کا کل رقبہ $ط^۲ (ک - \frac{۳ \sqrt{۳}}{۲})$ ہے

(۳۸) خط منحنی لق = ط جم بر + ص کا کل رقبہ دریافت کرو اسمین ط بڑا ص سے ہے اور حلقہ اندرونی کا رقبہ دریافت کرو

(۳۹) اگر لا اور ی محددین کسی نقطہ کے بعید البیضوی متساوی الاضلاع $لا^۲ - ی^۲ = ط^۲$ میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$لا = \frac{ط}{۲} (ی^{\frac{۲ لو}{ط^۲}} + ی^{-\frac{۲ لو}{ط^۲}}) \quad اور\ ی = \frac{ط}{۲} (ی^{\frac{۲ لو}{ط^۲}} - ی^{-\frac{۲ لو}{ط^۲}})$$

اسمین لو رقبہ درمیانی خط منحنی اور نصف قطر دائر اور محور کا ہے اور نصف قطر دائر مرکز سے نقطہ (لا و ی) تک کھینچا گیا ہے

(۴۰) بیضوی کے متقاطع علی القوایم عمود المماس کے نقطہ تقاطع کا مقام انتقاط جو خط منحنی ہو اوسکا کل رقبہ دریافت کرو ماحصل ک $(ط - ص)^۲$

یہہ بہی ثابت ہو سکتا ہے کہ مساوات خط منحنی کی

$$لق = \frac{(ط^۲ - ص^۲)^۲ (ط^۲ جیب^۲ بر - ص^۲ جم^۲ بر)^۲}{(ط^۲ + ص^۲) (ط^۲ جیب^۲ بر + ص^۲ جم^۲ بر)^۲} \quad ہے$$

(ہندسہ بالجبر کی مثال ۴۵۳ باب ۱۴ دیکہو)

(۴۱) خط ہیجان کے طرف نصف قطر دائرہ کی پوری چکر سے جو قوس مرتسم ہوتی ہے اوسکی اور خط مستقیم کے درمیان جو رقبہ واقع ہو اوسی دریافت کرو اور یہہ خط مستقیم اطراف قوس میں وصل ہوا ہے مثلاً اگر مساوات خط ہیجان کی ں = ط $\left(\frac{ر}{۲ کہ}\right)^{ن}$ ہو تو ثابت کرو کہ ۲ کہ سے ر کی کسی بڑی قیمت کے موافق رقبہ

$$\frac{کہ ط^{۲}}{۲ن+۱}\left[\left(\frac{ر}{۲ کہ}\right)^{۲ن+۱}-\left(\frac{ر}{۲ کہ}-۱\right)^{۲ن+۱}\right]$$ ہے

(۴۲) قریب البیضوی اور اوسکی لف اور دو نصف قطر دائرہ کے درمیان جو رقبہ واقع ہو اوسے دریافت کرو دفعہ ۱۵۷ دیکہو

(۴۳) خط تدویر اور اوسکے لف اور تدویر کے دو نصف قطر دائرہ کے درمیان جو رقبہ واقع ہو اوسے دریافت کرو

(۴۴) خط منحنی لاو = کا جو محور لا کے گرد چکر کہانے سے سطح مستدیر پیدا کرے اوسکا رقبہ دریافت کرو

(۴۵) اور خط منحنی ی = ط ی^{لا/ط} جو محور لا کے گرد چکر کہانے سے سطح مستدیر پیدا کرے اوسکا رقبہ دریافت کرو

(۴۶) محور ی کے گرد خط منحنی محیل ی = $\frac{ط}{۲}$ (ی^{لا/ط} + ی^{-لا/ط}) کی چکر سے جو سطح مستدیر پیدا ہو اوسکا رقبہ دریافت کرو

(۴۷) ثابت کرو کہ کرہ بیضوی نما کی کل سطح بیرونی کا رقبہ

$$۲ کہ ط^{۲}\left[۱+\frac{۱-ی^{۲}}{۲ ی}\ لوک\ \frac{۱+ی}{۱-ی}\right]$$ ہے

(۴۸) ایک خط تدویر اوس کے قاعدہ کے گرد چکر کہاتا ہے جو اس سے نکالا جاتا ہے تو ثابت کرو کہ کل سطح جو پیدا ہوگی اوسکا رقبہ $\frac{۳۲}{۳}$ کہ ط^۲ ہے

(۴۹) اپنے قاعدہ کے گرد خط تدویر چکر کہاتا ہے تو ثابت کرو کہ کل سطح بیرونی جو پیدا ہوگی $\frac{۶۴}{۳}$ کہ ط^۲ ہے

(۵۰) خط تدویر محور کے گرد چکر کہاتا ہے تو ثابت کرو کہ کل سطح جو پیدا ہوتی ہے اوسکا رقبہ ۸ کہ طؔ (کہ − ۴/۳) ہوگی

(۵۱) خط منحنی جسکا مماس ہمیشہ مساوی خط معلوم کے ہوتا ہے محور لا کے گرد چکر کہاتا ہے تو کل سطح بیرونی جو پیدا ہوگی اوسکا رقبہ ۴ کہ س۲ ہے

(۵۲) کرہ کو دو اسطوانے چہیدتے ہیں اور ان اسطوانون کے قطر برابر کرہ کے نصف قطرون کے ہین اور یہہ اسطوانے کرہ کے دوائرہ عظیمہ مین سے ایک سطح پر عمود ہین اور محور اونکے دونو نصف قطرون کے نقاط وسط مین گذرتے ہین اور یہہ دونو نصف قطر ایک قطر اس دائرہ عظیمہ کا بناتے ہین تو کرہ کے اوس حصہ کے سطح مستدیر کا رقبہ دریافت کرو جو ان اسطوانون کے درمیان نہین واقع ہوتے حاصل کرہ کے قطر کا دوچند مربع

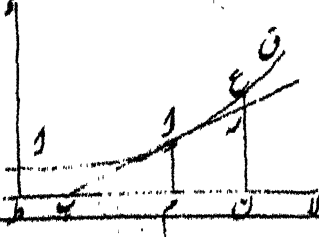
(۵۳) خط ی = ط ± ط لوک لا/ط کا جو حصہ درمیان حدود نہائی لا = ط اور لا = ط ی کے واقع ہو اوسے جو سطح مستدیر پیدا ہو اوسکا رقبہ دریافت کرو

(۵۴) مع ز ی ص/ع کو دریافت کرو ز ص ایک جز ترکیبی سطح بیرونی کا ہے اور ع عمود مبدء سے جز ترکیبی کی سطح مماس پر ہے اور کل مجسم بیضوی لا۲/ط۲ + ی۲/ص۲ + ز۲/س۲ = ۱ کے اوپر کلی پہیلائی گئی ہے

حاصل ۴ کہ/۳ ط ص س (ط۲ ص۲ + ص۲ س۲ + س۲ ط۲)

باب ہشتم

اجسام کا حجم

صورقا تو نیہ جنمین کلی مفرد ملتف ہے جسم مستدیر

(۱۷۸) فرض کرو کہ خط منحنی ا ع ق مین ا نقطہ معین ہے اور کوئی اور نقطہ خط منحنی مین ع ہے جسکے محددین لا اور ی ہین اور جس مقابلہ کے موافق لا بڑا بہ نسبت آ کے محدد کے ہے اب فرض کرو کہ خط منحنی محور لا کے گرد چکر لگائے اور خط منحنی سے جو سطح پیدا ہوا وسے اور دو سطحون سے جو محور لا پر عمود ہون اور ایک نقطہ آ پر سے اور دوسرے نقطہ ع پر گذرے جو جسم احاطہ ہوا ہوا وسکے حجم کو جہ سے تعبیر کرو تو بموجب دفعہ ۳۱۴ علم حساب الجزئیات کے

$$\frac{ز جہ}{ز لا} = ک ی^2$$

اسواسطے جہ = صح ک ی^2 ز لا

خط منحنی کی مساوات سے ی کو لا کے جملہ معلوم مین دریافت کر سکتے ہین فرض کرو کہ صح (لا) کلی ک ی^2 کی ہو تو

$$جہ = صح (لا) + س$$

فرض کرو کہ جہ۱ حجم کو اوس حالت مین تعبیر کرتا ہے کہ نقطہ ع کا لا۱ محدد ہو اور جہ۲ حجم کو اوس حالت مین تعبیر کرو کہ نقطہ ع کا محدد لا۲ ہو تو

$$جہ_۱ = صح (لا_۱) + س$$

$$جہ_۲ = صح (لا_۲) + س$$

اسواسطے جہ۲ − جہ۱ = صح (لا۲) − صح (لا۱) = ک $\int_{لا_۱}^{لا_۲}$ ی^2 ز لا

(۱۷۹) مخروط مستدیر قائم پر عمل دفعہ مذکور کا کرو

فرض کرو کہ خط مستقیم مبدء مین گذرتا ہے اور محور لا پر زاویہ سہ بناتا ہے تو یہہ خط ایک مخروط مستدیر قائم محور لا کے گرد چکر کر کے پیدا کریگا یہان

$$ی = لا مس سہ$$

پس جہ = صح ک مس^2 سہ لا^2 ز لا = $\frac{ک مس^2 سہ}{۳}$ لا^3 + س

حجم۲ − حجم۱ = کہ جب۲ سہ / ۳ (لا۲^۳ − لا۱^۳)

فرض کرو کہ لا۱ = ۰ اور ی = لا۲ مس سہ پس حجم کہ جب۲ سہ لا۲^۳ / ۳ یعنی کہ ی۲^۲ لا۲ / ۳ ہوجایگا اسسے معلوم ہوا کہ حجم مخروط مستدیر قائم کا ایک تہائی حاصل ضرب قاعدہ کے رقبہ اور ارتفاع کا ہوتا ہے

(۱۸۰) کرہ پر دفعہ مذکور کا عمل کرو

یہاں کرہ کے مرکز کو مبدء مقرر کرو تو ی^۲ = ط^۲ − لا^۲ حاصل ہوگا پس

مع کہ ی^۲ زلا = کہ (ط^۲ لا − لا^۳ / ۳) + س

حجم نصف کرہ کا = ^ط مع کہ ی^۲ زلا = ۲ کہ ط^۳ / ۳

(۱۸۱) مجسم قریب البیضوی پر دفعہ مذکور کا حکم لگاؤ

یہاں مجسم کا پیدا کرنے والا خط منحنی قریب البیضوی ہے

ی^۲ = ۴ ط لا

پس حجم۲ − حجم۱ = کہ ^لا۲_لا۱ مع ۴ طلا زلا = ۲ ط کہ (لا۲^۲ − لا۱^۲)

فرض کرو کہ لا۱ = ۰ تو حجم ۲ ط کہ لا۲^۲ ہوجایگا یعنی ½ کہ ی۲^۲ لا۲ اسمین ی۲^۲ = ۴ ط لا۲

پس حجم نصف اوس اسطوانہ کا ہے جسکا وہی ارتفاع یعنی لا۲ اور وہی قاعدہ یعنی وہ دائرہ ہے جسکا نصف قطر ی۲ ہے

(۱۸۲) خط تدویر اپنے محور پر چکر کہانے سے جو مجسم پیدا کرتا ہے اوسکا حجم دریافت کرو

بعلم حساب الجزئیات کی دفعہ ۳۵۸ کے موافق

ی = √(۲ طلا − لا^۲) + ط جع^۱ لا / ط

کلی اسطرح آسانی سے نکلیگی کہ لا اور ی کی جگہ اونکی قیمتین ارقام بر مین رکھین (دفعہ ۳۰۸ علم حساب الجزئیات) پس

کہ مع ی^۲ زلا = کہ ط^۳ مع (بر + جب بر)^۲ جب بر زبر

نصف خط تدویر کے چکر کہانے سے جو حجم پیدا ہوتا ہے اوسکے حاصل کرنے کے واسطے لا کے حدود ۰ اور ۲ط ہیں

۰ اور ۲ ط مقرر کرو تو اسکے موافق بر کی حدود نغائی ۰ اور کہ ہونگین

اب مع بر² جب بر ز بر = - بر² جم بر + ۲ مع بر جم بر ز بر

= - بر² جم بر + ۲ بر جب بر + ۲ جم بر

اسواسطے کہ مع بر² جب بر ز بر = کہ² - ۴

مع بر جب² بر ز بر = مع بر (۱ - جم ۲ بر) ز بر = بر²/۴ - بر جب ۲ بر/۴ - جم ۲ بر/۸

اسواسطے ۲ کہ مع بر جب² بر ز بر = کہ²/۲

اور کہ مع جب³ بر ز بر = ۲ کہ مع جب³ بر ز بر = ۲ ۴/۳ دفعہ ۳۵

پس حجم مطلوب = کہ ط³ [کہ² - ۴ + کہ²/۲ + ۴/۳] = کہ ط³ (۳ کہ²/۲ - ۸/۳)

(۱۸۳) مجسم مستدیر کے حجم کی صورت قانونیہ جہ = مع کہ ء² ز لا مثل اور صور قانونیہ کے جنکا بیان ہوا ہے ایسے ہی کہ جسکی صداقت اوسیوقت ظاہر معلوم ہوتی جسوقت علم حساب الکلیات کا طریقہ کتابت سمجھ مین اجاتا ہے دفعہ ء کی شکل مین اگر ع م رہو اور م ن تعبیر ∆ لا سے ہو تو کہ ء² ∆ لا حجم اوس مجسم کا ہوگا جو محور لا کے گرد م ن ع ع کی حرکت سے پیدا ہوتا ہے

پس حج کہ ء² ∆ لا اوس حجم سے کہ ا د ی ب کی حرکت سے پیدا ہوتا ہے تفاوت بقدر مجموعہ اجسام کے رکھتا ہے اور یہہ اجسام وہ ہین جو ع ع ق کے چکر لگانے سی پیدا ہوتے ہین اور بحد غائی کے لینے مین یہہ مجموعہ معدوم ہوتا ہے

پس حجم جو ا د ی ب کی چکر لگانے سے پیدا ہوتا ہے برابر حد غائی حج کہ ء² ∆ لا کے یعنی مع کہ ء² ز لا کے ہے

(۱۸۴) علی ہذا القیاس اگرچہ اوس حجم کو تعبیر کرے کہ اوس سطح مستدیر سے کہ محور ی پر خط منحنی کے چکر کہانے سے پیدا ہوتا ہے اور اون سطوح مستویہ سے کہ محور پر عمود ہین احاطہ ہوتا ہے تو یہہ حاصل ہوگا کہ

حہ = مع کہ لاٰ ز ی

اور دفعہ ۱۷۸ کی طرح یہہ حاصل ہوگا کہ

حہ۲ − حہ۱ = ۱/۲ مع کہ لاٰ زی

(۱۸۵) فرض کرو کہ محور لا کے گرد دو خط منحنی چکر لگاتے ہین اور اسطرح دو سطوح مستدیر پیدا ہوتے ہین اب اون دو حجموں کا تفاوت دریافت کرنا چاہیے جنمین سے ایک سطح مستدیر اور اون سطوح مستوی سی کہ محور لا پر عمود ہین پیدا ہوتا ہے اور دوسرا دوسرے سطح مستدیر اور سطوح مستوی مذکورہ سی پیدا ہوتا ہے

فرض کرو کہ ی = مج (لا) مساوات اول خط منحنی کی ہے اور ی = مج (لا) دوسرے خط منحنی کی ساوات۔

پس اگر حہ تفاوت مطلوب ہو تو یہہ حاصل ہوگا

حہ = مع کہ [مج (لا)]^۲ زلا − مع کہ [مج (لا)]^۲ زلا

= کہ مع {[مج (لا)]^۲ − [مج (لا)]^۲} زلا

اگر سطوح مستوی جو حجم مطلوب کو احاطہ کرتی ہین لا = لا۱ اور لا = لا۲ سے تشخیص ہوں تو ہم کو کلی لا۱ اور لا۲ کے درمیان لا کے واسطے لینی چاہئی

ایک آسان صورت یہہ فرض کرو کہ خط منحنی مقید ایسا ہے کہ خط مستقیم ی = ط تنصیف معین کے کرتا ہے جو محور ی کا متوازی ہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ مج (لا) = ط + مصر (لا) اور مج (لا) = ط − مصر (لا) اسمین مصر (لا) کسی لا کے جملہ کو تعبیر کرتا ہے پس

[مج (لا)]^۲ − [مج (لا)]^۲ = ۴ ط مصر (لا)

اور حہ = کہ مع ۴ ط مصر (لا) زلا

فرض کرو کہ محدد خط منحنی کے اطراف کے لا۲ اور لا۱ ہین تو محور لا کے گرد خط منحنی کی گردش سے جو حجم پیدا ہوگا ۴ ط کہ لا۲ لا۱ مع مصر (لا) زلا ہوگا اور ۲ لا۲ لا۱ مع مصر (لا) زلا رقبہ خط منحنی مقید کا ہے پس حجم برابر حاصل ضرب ۲ ط کہ اور رقبہ کا ہوا

اس اثبات مین یہہ فرض کرلیا ہے کہ خط منحنی سارا محور لا کی ایک ہی جانب مین واقع ہے
اگر حجم پیدا کرنے والا خط منحنی دائرہ ہو جو مساوات

(لا - صہ)^{۲} + (ی - ک)^{۲} = س^{۲}

سے دریافت ہوتا ہو تو اوسکا رقبہ کہ س^{۲} ہوگا اور اسیواسطے اوسکی گردش سے محور لا کے گرد جو حجم پیدا ہوگا
۲ ک س^{۲} کہ^{۲} ہوگا

(۱۸۶) اسیطرح سے اگر خطوط منحنی لا = مح (ط) اور لا = مح (ی) محور ی کے گرد گردش کرین
توان سطوح مستدیر اور محور ی پر سطوح مستوے عمودی کے درمیان جو حجم پیدا ہوگا وہ

جہ = کہ مع [{مح (ی)}^{۲} - {مح (ی)}^{۲}] ز ی

(۱۸۷) دفعہ ۱۷۸ مین جو ترکیب جسم مستدیر کی حجم دریافت کرنی کی لکھی ہے وہ ہر مجسم کیواسطے
اختیار کیجاتی ہے اس ترکیب کو اسطرح بھی بیان کرتے ہین کہ مجسم کو یون خیال کرو کہ وہ
پتلے پتلے پھانکون مین متوازی سطوح مستوے کے ایک سلسلہ سے تقسیم ہوا ہے
اب ہر پھانک کا حجم تقریباً دریافت کرو اور پھران حجوم کے جمع کرو اور اس حاصل جمع
کی حد غائی اوس حالت مین کہ ہر پھانک غیر محدود چھوٹی ہوجاے دریافت کرو
تو حجم مجسم مطلوب کا دریافت ہوجائیگا فرض کرو کہ محور لا پر جو سطوح مستوے عمود ہون اونسے
مجسم پھانکون مین تقسیم ہوا اور مح (لا) رقبہ اوس تراش مجسم کا ہے کہ مبدء سے لا
بعد پر سطح مستوے سے قطع ہوتا ہے اور دوسرے سطح کا فاصلہ مبدء سے لا + ∆ لا ہے
پس ان دو سطوح مستوے کے مابین ایک پھانک ہے جسکا سمک ∆ لا ہی اور اوسکا حجم
مح (لا) ∆ لا ہے پس اسواسطے حجم مجسم کا حد غائی مح مح (لا) ∆ لا کی ہے
یعنی مع مح (لا) ز لا ہے اور کلی کے حدود غائی موقوف مجسم کی یا اوسکے کسی حصہ کے
غرض جو معرض بحث مین ہو اوسکی تخصیص پر موقوف ہونگین
مثلاً منشور لو جسکی تعریف (۱۱م) اقلیدس مین لکھی ہے منشور کو پھانکون مین سطوح مستوے

جو متوازی اور مساوی اور متشابہ سرون کے ہون اور محور لا کو عمود دونون سرون
فرض کرو پس مح (لا) ایک مقدار مستقل ہے اوسکا نام ا رکھو پس حجم منشور کا =
صحیع ا زلا = ا حصہ ا یعنی حصہ عمود بُعد دو برابر اور متشابہ سرون کے درمیان ہے

(۱۸۸) مجسم بیضوی پر اوپر کی دفعہ کا عمل کرو

مساوات مجسم بیضوی کی

$$\frac{لا^2}{ط^2} + \frac{ی^2}{ص^2} + \frac{ے^2}{س^2} = ۱$$

ہی اگر محور لا پر سطح متوازی عمود لا کے بعد پر مبدء سے ہو تو احاطہ تراش کا بیضوی ہوا جسکے نصف محور ص $\sqrt{(۱ - \frac{لا^2}{ط^2})}$ اور س $\sqrt{(۱ - \frac{لا^2}{ط^2})}$ ہین اسے معلوم ہوا کہ رقبہ بیضوی کا ک ص س $(۱ - \frac{لا^2}{ط^2})$ ہوا اسلیے یہہ قیمت مح (لا) کی ہر آئی معلوم ہوا کہ حجم مجسم بیضوی کا

$$= \text{صحیع}\ ک\ ص\ س\ (۱ - \frac{لا^2}{ط^2})\ زلا = \frac{۴ک\ ط\ ص\ س}{۳}$$

(۱۸۹) مخروط پر دفعہ مذکور کا عمل کرو

فرض کرو کہ مخروط ایسا ہے جسکا قاعدہ کوئی شکل مستقیم الاضلاع ہی اور قاعدہ کا رقبہ ا ہی اور حصہ ارتفاع ہے راس مخروط کو مبدء محددین مقرر کرو اور محور لا کا عمود قاعدہ مخروط پر ہے پس حجم مخروط کا

$$= \text{صحیع مح (لا) زلا}$$

اب تراش مخروط کی جو قاعدہ کی سطح متوازی سے ہے شکل مستقیم الاضلاع متشابہ قاعدہ کے ہوگی اور متشابہ شکلون کے رقبون مین وہ نسبت ہوتی جو اونکے اضلاع کے مربعون مین اور لا اور حصہ متناسب اضلاع متناظرہ کے ہین اسے ہم یہہ نتیجہ نکالتے ہین کہ

$$\text{مح (لا)} = \frac{لا^2}{حصہ^2}\ ا$$

پس حجم مخروط کا

$= \frac{1}{2}$ ھ ح لا ۲ ز لا $= \frac{1}{3}$ ھ ح

یہی تحقیقات مخروط مستدیر کے باب مین بہی ہوسکتی ہے جسکا قاعدہ کوئی خط منحنی مقید ہو

(۱۹۰) ایک اور مثال یہہ ہے کہ اوس حجم کو دریافت کرو جو مجسم بعید البیضوی کے اور اوسکے ممتنع الملاقات مخروط مستدیر اور دو سطوح مستوی کے درمیان واقع ہو اور یہہ دونو سطوح محور مشترک پر عمود ہین اور مجسم بعید البیضوی ایک فرع سے بنایا گیا ہے

فرض کرو کہ مساوات مجسم بعید البیضوی کی

$$\frac{لا^2}{ط^2} - \frac{ی^2}{ص^2} - \frac{ے^2}{س^2} + 1 = 0$$

اور مخروط مستدیر کی

$$\frac{لا^2}{ط^2} - \frac{ی^2}{ص^2} - \frac{ے^2}{س^2} = 0$$

اگر اول سطح مستدیر کی تراش محور لا پر مبدء سے بعد لا پر ایک سطح مستوی عمودی سے بنایا جاے تو احاطہ اس تراش کا بیضوی ہوگا جسکا رقبہ کہ ص س $\left(\frac{لا^2}{ط^2} + 1\right)$ ہے اور دوسرے سطح مستدیر کی تراش جو اسی سطح سے بنائی جاے اوسکا احاطہ بہی بیضوی ہے اور اوسکا رقبہ کہ ص س $\frac{لا^2}{ط^2}$ ہی اسواسطے تفاوت رقبون کا کہ ص س ہے اسی معلوم ہوا کہ حجم مطلوب جو سطوح مستوی لا = لا، اور لا = لا۲ سے احاطہ کیا گیا فرض کیا جاے

$\int_{لا_1}^{لا_2}$ کہ ص س ز لا یعنی کہ ص س (لا۲ − لا۱) ہے

(۱۹۱) بعض اوقات آسمین آسانی ہوتی ہے کہ تراشین سطح متوازیہ سے جو بنائی جائین وہ محور لا پر عمود نہ ہون اگر سہ زاویہ میلان محور لا کا سطح متوازیہ کے ساتھ ہو تو مج (لا) جیب سہ ∆ لا حجم ایک پہانک کا ہوگا اگے عمل موافق سابق کے کلی نکالنے کا کرو

(۱۹۲) دفعات ۱۷۶ اور ۱۷۷ مین جو کیفیتین لکھی ہین وہ اس باب کی نسبت بہی لکھہ سکتی ہین فرض کرو کہ مجسم ایسا ہی کہ جو تراش اوسکی سطح مستوی سی کہ وہ کسی معین سطح مستوی کی متوازی لا کے بعد پر بنائی جاتی ہے اوسکا رقبہ ہمیشہ ع + ق لا + ر لا۲ + ص لا۳ ہے اسمین

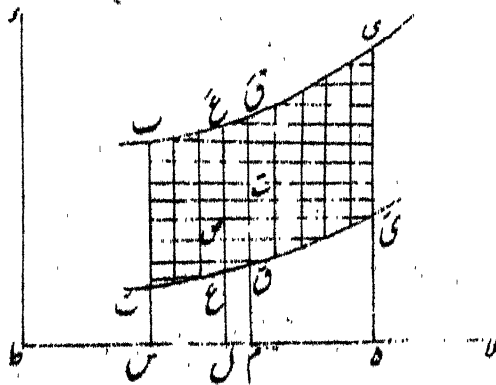
ع د ق و س د ص مقادیر مستقل ہین فرض کرو تین تراشین مجسم کی متساوی الابعاد سطح ہستوے معین کی متوازی سطوح سی بنائی جائین اور ۲ حہ دو اطراف کی تراشون کے ابین کا بعد ہو اور بالترتیب رقبہ تراشون کا ا۱ اور ا۲ اور ا۳ ہو تو مجسم کے اوس حصہ کا حجم جو اطراف کے تراشون کے مابین واقع ہو برابر

$$\frac{ح}{۳} (ا_۱ + ۴ ا_۲ + ا_۳) \text{ ہے}$$

اگر تراشین متساوی الابعاد بنائی جائین اور ۳ حہ بعد درمیان اطراف کی تراشون کے ہو اور رقبہ تراشون کا بالترتیب ا۱ و ا۲ و ا۳ و ا۴ ہو تو حجم مجسم کے اوس حصہ کا جو اطراف کے تراشون کے درمیان واقع ہو

$$\frac{۳ح}{۸} (ا_۱ + ۳ ا_۲ + ۳ ا_۳ + ا_۴)$$

ہوگا اسی معلوم ہوا کسی مجسم کی تقریبی حجم کے تخمینہ کرنے کے قواعد یہہ ہین کہ تراشین متساوی الابعاد بناؤ اور ان تراشون کے رقبون کو قائم مقام اون معینون کا کرو جو دفعات ۱۶۷ اور ۱۶۷ کے قواعد مین بیان ہوئی ہین

صور قانونیہ حسمین کلی تناہ ہے

(۱۹۳) اول ہم ایک صورت قانونیہ مجسم مستدیر کی لکھتی ہین شکل مین فرض کرو کہ لا اور ی محددین حق کے اور لا + ۵ لا اور ی + ۵ ی محددین نقطہ تََ کے ہین

اور فرض کرو کہ کل شکل محور لا کے گرد چکر کہاتی ہے تو جز ترکیبی ص ت سی ایک حلقہ دار مجسم پیدا ہوگا
جسکا حجم اخر کار ۲ ا کہ ی ∆ لا ∆ ی ہوگا اور یہہ بات اس خیال سے پیدا ہوتی ہے
∆ لا ∆ ی رقبہ ص ت کا ہے اور ۲ ا کہ ی محیط دائرہ کا ہے جو ص سے مرتسم ہوتا ہے
اسی معلوم ہوا کہ حجم جو ب ی ی َ بَ سے پیدا ہوتا ہے حد غائی ایسی رقموں کی ہوگی
جیسے ۲ ا کہ ی ∆ لا ∆ ی ہے

فرض کرو کہ ھ حجم مطلوب کو تعبیر کرتا ہے تو

ھ = ۲ ا کہ مع مع ی ز لا ز ی

حدود غائی کلی ایسی لی گئی ہی کہ اوسمیں تمام اجزاء ترکیبی حجم مطلوب کے داخل ہیں

(۱۹۴) فرض کرو کہ حجم مطلوب اسطرح حاصل ہوتا ہے کہ تمام شکل ب ی ی َ بَ کی چکر کہانے سے پیدا ہوتا ہے اور ی = یح (لا) مساوات اوپر کے خط منحنی کی اور ی = ضح (لا) مساوات نیچے کے خط منحنی کی ہے اور ط س = لا۱ اور ط ھ = لا۲ پس اول کلی حدود غائی ی = ضح (لا) اور ی = یح (لا) کے درمیان بلحاظ ی کے لو اور تمام اجزاء ترکیبی کو جو مثل ۲ ا کہ ی ∆ لا ∆ ی کے اوس مجسم میں داخل ہیں کہ قطعہ ع ق ع َ قَ کے حرکت سے پیدا ہوتا ہے جمع کرو اور پہر حدود غائی لا۱ اور لا۲ کے درمیان بلحاظ لا کے کلی لو تو اپس عمل کو رموز میں اسطرح بیان کرتے ہیں کہ

ھ = ۲ ا کہ مع^لا۲^لا۱ مع^یح(لا)^ضح(لا) ی ز لا ز ی

= ا کہ مع^لا۲^لا۱ [[یح (لا)]۲ - [ضح (لا)]۲] ز لا

دوسری صورت بایں اسطرح حاصل ہوتی ہے کہ حدود غائی معینہ کے درمیان بلحاظ ی کے کلی لیں اور وہ مطابق دفعہ ۱۸۵ کے ہوتا ہے

(۱۹۵) ہیں دفعہ گذشتہ ہیں مجسم کو اجزاء ترکیبی میں جو حلقی ہیں اونمیں تقسیم کیا ہے اور ان حلقون کا کونہ ۲ ا کہ ی ∆ لا ∆ ی ہے اول کلی میں ان حلقون کو جمع کیا ہے

جیسے کہ ایک شکل ایسی بنتی ہے کہ وہ تفاوت دو متحد المرکز مدور قطعات کا ہے اور دوسرے کلی میں ہم نے ان تمام شکلوں کو جمع کیا ہے اور اوس سے ہم مطلوب کا حجم دریافت ہو سکتا ہے دفعہ گذشتہ کی صورت قانونیہ کی صداقت اوسیوقت ظاہر معلوم ہونی لگتی ہے کہ علم حساب الکلیات کا طریقہ کتابت میں آجاتا ہے

(۱۹۶) فرض کرو کہ شکل جو محور لا کے گرد چکر کہاتی ہے خطوط منحنی لا = مج (د) اور لا = صح (د) سے اور خطوط مستقیم د = د۱ اور د = د۲ سے احاطہ ہوئی تو حد کے واسطے صورت قانونیہ کے نکالنے میں آسانی ہوگی کہ اول کلی بلحاظ لا کے لیں تو

ح = ۲ک ∫ ∫ (مج(د) تا صح(د)) د ز د ز لا

اس صورت میں کلی بلحاظ لا کے جب لیتے ہیں تو ہم تمام اجزاء ترکیبی کو جو مثل ۲ک د △ د △ لا کے ہیں جمع کرتے ہیں اور انکا نصف قطر د ہی ہے پس حاصل جمع ان اجزاء ترکیبی کا ایک خول پتلا اسطوانہ کی شکل کا ہوتا ہے جسکی ضخامت △ د ہے اور نصف قطر د اور

مج (د) − صح (د) ارتفاع

پس ح = ۲ک ∫ [مج (د) − صح (د)] د ز د

(۱۹۷) یہہ ایک مثال دفعہ گذشتہ کی ہے کہ حجم اوس مجسم کا دریافت کریں جو اسطح پیدا ہوتا ہے کہ رقبہ ال ب کو محور لا کے گرد شکل دفعہ ۱۴۱ میں چکر دیں نصف کرہ جو ص ل ب کے چکر کہانے سی پیدا ہوتا ہے اور مجسم قریب البیضوی جو ا ص ل کے چکر کہانے سے پیدا ہوتا ہے ان دونوں میں جو نصف کرہ کو افزائش مجسم قریب البیضوی پر حاصل ہوگی اوسکی برابر حجم مطلوب ہوگا پس اسواسطے ماحصل معلوم ہے اس مثال کو نتیجہ کے خاطر سے نہیں لکھا بلکہ کلی مثناۃ کے توضیح اور تصریح کے واسطے لکہا ہے فرض کرو کہ ص مبدء ہے اور محور لا کی مثبت سمت بائیں طرف ہے تو مساوات ال کی د۲ = ۴ ط (ط − لا) ہے اور ب ل کی د۲ = ۴ ط − لا۲

فرض کرو کہ حہ حجم مطلوب کو تعبیر کرتا ہے تو

حہ = ۲طمع ۴ط۲ - ی۲ مع ۲کہ ی زی زلا

اگر ہم اول کلی بلحاظ ی کے لین تو دفعہ ۱۷۱ کی طرح فرض کرو کہ شکل ال ب دو حصون مین تقسیم ہوئی ہے پس

حہ = طمع (۴ط۲ - ا۲) مع ۲کہ ی زلا زی + ۲طمع (۴ط۲ - لا۲) مع ۲کہ ی زلا زی

اگر اول بلحاظ ی کے کلی لینی چاہین تو دفعہ ۱۷۱ کی طرح شکل ال ب کو دو حصون مین تقسیم کرو

پس حہ = طمع (۴ط۲ - لا۲) مع ۲کہ ی زلا زی + ۲طمع (۴ط۲ - لا۲) مع ۲کہ ی زلا زی

پہر فرض کرو کہ محور لا کے گرد جو ل س کے چکر کہانی سی حجم پیدا ہوا اسکو دریافت کرنا مطلوب ہے اور محور لا کے مثبت سمت دائین طرف ہی تو ساوات ل س کی ی۲ = ۴ط (ط + لا) ہے

اور ل د کی ی۲ = ۴ط۲ - لا۲ ہے فرض کرو کہ حہ حجم مطلوب ہے تو

حہ = ۲طمع (۴ط۲ + ۴طلا) مع ۲کہ ی زلا زی

اگر ہم بلحاظ لا کے اول کلی لگا لینی چاہی تو دفعہ ۱۷۱ کی طرح فرض کرو کہ ل س دو حصو مین تقسیم ہوتا ہے

پس حہ = ۲طمع ۲طمع ۲کہ ی زی زلا + ۲طمع ۲طمع ۲کہ ی زی زلا

(۱۹۸) اسی طرح اگر محور ی کے گرد خط منحنی کے چکر کہانے سے جو مجسم پیدا ہو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے

حہ = مع مع ۲کہ لا زی زلا

(۱۹۹) اب ہم کسی ایک جسم کا ذکر کرتے ہین

فرض کرو کہ لا اور ء اور ے محددین نقطہ ع کے ہین اور ع کوئی نقطہ سطح کا ہے اور

اسکے متصل کے نقطہ ق کے محددین لا + ∆ لا اور و + ∆ ء اور ے + ∆ ے

ہین ع سے سطوح متوازی سطوح مستوی محددین (لا ء ے) اور (ء و ے) کے کہنچو اور ق سے

بہی سطوح متوازی انہین محددین سطح کے نکالو توان چارون سطوح کے درمیان

ایک ستون ہوگا جسکا ع ق قاعدہ ہے اور ع ع ارتفاع ہے حجم اس ستون کا

اخر کو ے ∆ لا ∆ ء ی اور حصہ معین سطح معلوم کے سطح مستوی (لا ء) کے

درمیان جو حجم واقع ہوگا وہ اسطرح دریافت ہوگا

کہ رقمین جو مثل ے ∆ لا ∆ ء کے ہین اونکے سلسلہ کو جمع کرو اور فرض کرو کہ حہ حجم کو تعبیر کرتا ہے تو

حہ = مع مع ے ز لا ز ء

سطح کے مساوات سے ے جملہ لا اور ء کا معلوم ہوتا ہے حدود دغائی کلی کے ایسی لینی چاہئے

کہ تمام اجزاء ترکیبی مجسم کے اوسمین داخل ہون

اگر ہم بلحاظ ء کے اول کلی لین تو ہم اون ستونون کو جمع کرین جنسے کہ وہ یہانتک بنے ہی

جو درمیان دو سطوح مستوی کے کہ عمود محور لا پر ہین واقع ہوتی ہے پس حدود

کلی بلحاظ ء کے جملہ لا کا ہوگا اور یہہ حاصل ہوگا کہ

مع ے ز ء = ح (لا)

اسمین ح (لا) نفس الامر مین رقبہ تراش مجسم کا ہے اور یہہ تراش اوس سطح

مستوی سے پیدا ہوتی ہے کہ لا کے فاصلہ پر ء سے محور لا پر عمود ہو پس اخر کو

حہ = مع ح (لا) ز لا

یہہ صورت قانونیہ دفعہ ۱۸۷ کی ساتھہ مطابق ہوتی ہے

(۲۰۰) مجسم بیضوی پر عمل دفعہ مذکور کا کرو

اوس مجسم بیضوی کے اٹھوین حصہ کا حجم دریافت کرو جسکی مساوات

$\frac{لا^2}{ط^2} + \frac{ی^2}{ص^2} + \frac{ے^2}{س^2} = ۱$ ہو

یہان ہم کو یہہ دریافت کرنا ہے کہ

$مع\ مع\ س \sqrt{(۱ - \frac{لا^2}{ط^2} - \frac{ی^2}{ص^2})}\ زلا زی$

اول کلی بلحاظ ی کے ہو تو حدود غائی ی کی صفر اور ل ہے یعنی صفر اور ص $\sqrt{(۱ - \frac{لا^2}{ط^2})}$ ہی اسطرح سی مجموعہ تمام اون ستونون کا جو درمیان سطوح مستوی ل ع ل اور م ق م کی واقع ہوتے ہین دریافت ہوگا اب حدود غائی معینہ کے درمیان

$مع \sqrt{(۱ - \frac{لا^2}{ط^2} - \frac{ی^2}{ص^2})}\ زی = \frac{ک ص}{۴} (۱ - \frac{لا^2}{ط^2})$

پس $حہ = مع\ \frac{ک}{۴} ص\ س\ (۱ - \frac{لا^2}{ط^2})\ زی$

حدود غائی لا کی ۰ اور ط ہین پس اسطرح سی مجموعہ تمام اون پہانکون کا معلوم ہوتا ہے کہ مجسم ط ا ب س س داخل ہین اسی معلوم ہوا کہ $حہ = \frac{ک ط ص س}{۶}$

(۲۰۱) فرض کرو کہ سطح بیرونی اس مساوات لا ی = ط ے سے تشخیص ہوتا ہے اور اوس حجم کو معلوم کرنا چاہتے ہین کہ سطح مستوی (لا وی) اور سطح بیرونی معلوم اور چار سطوح مستوی لا = لا۱ اور لا = لا۲ اور ی = ی۱ اور ی = ی۲ سے احاطہ ہوتا ہے یہان حجم ذیل کے مساواتون سی معلوم ہوتا ہی کہ

$حہ = مع^{لا_2}_{لا_1} مع^{ی_2}_{ی_1} \frac{لا ی}{ط}\ زلا زی$

$= \frac{۱}{۴ط} (ی_2^2 - ی_1^2)(لا_2^2 - لا_1^2)$

$= \frac{۱}{۴ط} (لا_2 - لا_1)(ی_2 - ی_1)\left[لا_1 ی_1 + لا_2 ی_2 + لا_1 ی_2 + لا_2 ی_1\right]$

$= \frac{۱}{۴} (لا_2 - لا_1)(ی_2 - ی_1)(ے_1 + ے_2 + ے_3 + ے_4)$

اسمین ے۱ اور ے۲ اور ے۳ اور ے۴ معین حصہ منتخب کے چار کونون کے نقطون کے ہین

(۲۰۲) سطح مستوی ے = ۰ اور سطوح بیرونی لا ی = ط ے اور $(لا - حہ)^2 + (ی - ک)^2 = س^2$ کے درمیان جو حجم داخل ہوا وسے دریافت کرو

یہان ہم کو کلی $مع\ مع\ \frac{لا ی}{ط}\ زلا زی$ اون حدود غائی کے درمیان لینی ہین جو $(لا - حہ)^2 + (ی - ک)^2 = س^2$

سے تشخیص ہوتے ہیں

اب مع ذ ز ی = $\frac{ی}{۲}$ اور ی کی حدود غائی

ک − √[س۲ − (لا − ھ)۲] اور ک + √(س۲ − (لا − ھ)۲) ہیں

پس ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

۲ک √[س۲ − (لا − ھ)۲]

پس اخر کو حجم مطلوب

$= \frac{۲ک}{ط}$ مع √[س۲ − (لا − ھ)۲] ز لا

اسمین حدود غائی لا کی ھ − س اور ھ + س ہین اور

مع لا √[س۲ − (لا − ھ)۲] ز لا = مع (لا − ھ) √[س۲ − (لا − ھ)۲] ز لا

+ ھ مع √[س۲ − (لا − ھ)۲] ز لا

لا − ھ = طو کے رکھو تو یہہ حاصل ہوگا

مع طو √(س۲ − طو۲) ز طو + ھ مع √(س۲ − طو۲) ز طو

حدود غائی طو کی − س اور + س ہین اسواسطے ما حصل $\frac{ھ س۲ ک}{ی}$ ہے

اور حجم مطلوب $\frac{ھ ک س۲ ک}{ط}$ ہے

اس نتیجہ مین یہہ فرض کیا گیا ہے کہ لا ء مثبت کلی کی تمام حدود غائی کے درمیان ہے

یعنی دائرہ جو (لا − ھ)۲ + (ی − ک)۲ = س۲ سے تشخیص ہوتا ہے اول ربعہ مین یا تیسرے ربعہ

مین بالکل فرض کیا گیا ہے اگر یہہ شرط پوری نہوتی ہو تو نتیجہ سے حجم کی قیمت عدد نہین تشخیص ہو سکتی

لیکن اوسکی میزان یون لگ سکتی کہ کسی حصہ کو مثبت اور کسی حصہ کو منفی تخمینہ مین لگائین

مثلاً اگر ھ اور ک معدوم ہوجائین تو ہمارا نتیجہ بہی معلوم ہوجائیگا

(۲۰۳) مجسم کو جو ایسی ستونون مین تقسیم کرتے ہین کہ اوسکا قاعدہ سطوح قائم الزاویہ پر ہو اور

اور اس سبب سے حجم ستون ∆ لا ∆ ی ہوتا ہے ہم مجسم کو ایسے ستونون مین تقسیم کرین

کہ وہ رقبہ کے قطعی جز ترکیبی پر قائم ہو تو اسی بہہ معلوم ہوگا کہ سبون کا حجم ے لق ∆ یر ∆ لق ہہ
اسواسطے حجم حہ مجسم کا اس صورت قانونیہ سے تعبیر ہوگا کہ

حہ = مع مع ے لق زیبر زلق

مساوات سطح مستدیر ے کو لق اور یبر کے جملون مین بیان کرو
مثلاً اوس حجم دریافت کرنا منظور ہو جو سطح مستوی ے = ۰ اور سطوح مستدیر لا٢ + ی٢ = ٤ط ے
اور ی٢ = ٢س لا − لا٢ کے درمیان واقع ہو یہان ے = لق٢ / ٤ط اور حدود غائی
لق اور یبر کی ایسی ہونی چاہی کہ کلی تمام رقبہ دائرہ ی٢ = ٢س لا − لا٢ پر پہیلے فرض کرو کہ
لق = ٢س حم یبر تو حجم مطلوب

= ۲ مع^(½ک) مع^(٢س حم یبر) لق٣/٤ط زیبر زلق

= س٤/ط ۲ مع^(½ک) حم٤ یبر زیبر

= ٢س٤/ط مع^(½ک) حم٤ یبر زیبر

= ٢س٤/ط · ٣/٤ · ½ · ک/٢ (بموجب دفعہ ٣٥)

= ٣ک س٤ / ٨ط

(۲۰۴) اوس مجسم کا حجم دریافت کرو جو سطح مستوی (لا ی) اور سطح مستدیر کے درمیان واقع ہو
اور مساوات سطح مستدیر کی

ے = ط ی^(−(لا٢+ی٢)/س٢)

ہی یہان چونکہ لا٢ + ی٢ = لق٢

حہ = ط مع مع ی^(−لق٢/س٢) لق زیبر زلق

سطح مستدیر مبدء سے ہر سمت مین غیر متناہی پہیلتی پس حدود غائی یبر کی ۰ اور ٢ک ہین
اور ی کے ۰ اور ∞ ہین

اب مع ی^(−لق٢/س٢) لق زلق = − ی^(−لق٢/س٢)/٢ س٢

پس صحیح تی سق لو زاق = $\frac{\pi}{2}$

اور ۲کہ صحیح ن ہ ر = ۲کہ

پس حجم مطلوب کہ ط س ہے

صور قانونیہ حجم کی متلثہ مانتے ہے

(۲۰۵) دفعہ ۱۹۹ کی شکل میں فرض کرو کہ ہم ایک سلسلہ سطح مستوی کا کھینچیں جو محور ے پر عمود اور ے فاصلہ ایک سطح مستوی کا مبدء سے ہو اور ے + ∆ ے فاصلہ دوسرے سطح مستوی کا ہو ان سطوح مستوی کے درمیان ستون ع ق ع ق ایک جز ترکیبی قائم الزاویہ مجسم متوازی السطوح جسکا حجم ∆ لا ∆ ی ∆ ے ہی کل مجسم کو ایسے اجزاء ترکیبی کے مجموعہ کی حد غائی خیال کر سکتے ہیں اسے معلوم ہوا کہ اگر حہ اوسکے حجم کو تعبیر کرے تو

حہ = صحیح صحیح صحیح زلا زی زے

(۲۰۶) اسطوانہ جو مساوات

لا^2 + ی^2 − ۲ط لا = ۰

سے تشخیص ہوتا ہے اوسکے اوس حصہ کا حجم دریافت کرو جو سطوح مستوی

ے = لا مس سہ اور ے = لا مس صہ

کے درمیان واقع ہو

یہاں اگر ی، قائم مقام $\sqrt{(۲ط لا − لا^2)}$ کا ہو تو یہہ سامل ہو گا کہ

حہ = صحیح ۲ط صحیح ی صحیح لا مس صہ لا مس سہ زلا زی زے

= صحیح ۲ط صحیح ی (مس صہ − مس سہ) لا زلا زی

= ۲ (مس صہ − مس سہ) صحیح ۲ط لا $\sqrt{(۲ط لا − لا^2)}$ زلا

= ۲ (مس صہ − مس سہ) $\frac{\pi ط^3}{۲}$

(۲۰۷) ہم پہلے لکھ آئے ہیں کہ قطعی جز ترکیبی مستوی رقبہ کا ل ∆ ہر ∆ ل ہے

فرض کرو کہ خط ابتدائی کے گرد زاویہ ۲ کہ پر یہہ سطح مستوی چکر کہائے تو مجسم حلقہ دار پیدا ہوگا جسکا حجم ۲ کہ لق جب بر لق ۵ بر ۵ لق ہوگا

چونکہ ۲ کہ لق جب بر محیط اوس دائرہ کا ہی جو اوس نقطہ سے مرتسم ہوتا ہے جسکے قطبی محددین فرض کرو کہ سہ اوس زاویہ کو تعبیر کرتا ہے جو سطح مستوی جز ترکیبی کے کسی مقام پر سطح مستوی کے ابتدائی مقام پر بناتی ہے اور سہ + ۵ سہ وہ زاویہ ہے جو سطح مستوی مقام متصلہ پر ابتدائی سطح مستوی کے ساتھہ بناتی تو حصہ حلقہ مجسم کا جو سطح مستوی متحرک کے درمیان ان دونو مقاموں میں واقع ہوگا کل حلقہ مجسم سے وہی نسبت رکھتا ہے جو ۵ سہ نسبت ۲ کہ سے رکھتا ہے اسسے معلوم ہوا کہ حجم اس حصہ درمیانی کا

لق^{2} جب سہ ۵ سہ ۵ بر ۵ لق

ہی پس یہہ محددین قطبی موافق ایک صورت بیانیہ ہر مجسم کے جز ترکیبی کے لئے ہے پس معلوم ہوا کہ حجم کل مجسم کا اسی اجزاء ترکیبی کی مجموعہ کی حد غائی لینی سے دریافت ہوتا ہے یعنی اگر جہ حجم مطلوب کو تعبیر کرے تو

جہ = مج مج مج لق^{2} جب بر ز سہ ز بر ز لق

کلی کی حدود غائی ایسی لینی چاہئی کہ اونمیں تمام اجزاء ترکیبی مجسم کے آجائیں طالب علم کو یاد رکھنا چاہئی کہ مبدء سے کسی نقطہ کے بعد کو لق تعبیر کرتا ہے اور بر اوس زاویہ کو تعبیر کرتا ہے کہ یہہ بعد کسی خط مستقیم معین کے ساتھہ بناتا ہے اور سہ وہ زاویہ ہے جو سطح مستدیر اس بعد اور خط مستقیم معین پر گذرنے سے سطح مستوی معین کے ساتھہ بناتی ہے اور یہہ سطح معین خط مستقیم معین پر گذرتی ہے

(۲۰۸) مثلاً فرض کرو کہ ہم صورت قانونیہ کو وہاں کام میں لایا چاہتے ہیں جہاں کرہ کے اٹھواں حصہ کا حجم ہم کو دریافت کرنا ہو اول کلی بلحاظ لق کے لو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

مج لق^{2} ز لق = لق^{3}/۳

فرض کرو کہ ط نصف قطر کرہ کا ہے تو حدود غائی لق کی ۰ اور ۲ط ہین پس

ج = مح مح $\frac{ط^۳}{۳}$ جب سر ز سر ز بر

پس بلحاظ لق کے کلی لینے مین ہم تمام اجزاء ترکیبی جو مثل $\frac{ط^۳}{۳}$ جب بر ∆ سر ∆ بر ∆ لق کے ہین اور مجسم مخروطی کو بناتے ہین جمع کرتے ہین مخروط کا راس مرکز کرہ پر ہے اور اوسکا قاعدہ سطح مستدیر کرہ کا جز ترکیبی منحنی ہے اور وہ ط۲ جب بر ∆ سر ∆ بر سے تعبیر ہوتا ہے

کلی بلحاظ بر کے لو تو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

مح جب بر ز بر = − جم بر

بر کی حدود غائی ۰ اور $\frac{ط}{۲}$ ہین پس؛

ج = مح $\frac{ط^۳}{۳}$ ز سر

اسطرح بلحاظ بر کے جب کلی لیجاتی ہے تو ہم تمام اون مخروطات کو جمع کرتے ہین جو متشابہ $\frac{ط^۳}{۳}$ جب بر ∆ سر ∆ سر ∆ بر کے ہین اور یہہ مخروط مجسم پہانک کے اندر ہین اور یہہ پہانک بشکل فانہ ہے اور یہہ مجسم دو سطوح مستوی کے درمیان واقع ہوتا ہے اور یہہ سطوح مستوی خط مستقیم معین مین گذرتی ہین اور یہہ خط مستقیم معین مواقع سر اور سر + ∆ سر کے لیا گیا ہے

اب اخر یہہ ہے کہ بلحاظ سر کے ۰ سے ۲ط تک کلی لین تو

ج = $\frac{۴ط^۳}{۳}$

اس مثال مین کلیان ہر یک ترتیب سے لی جاسکتی ہین طالب علم کو چاہئی کہ اونکو مختلف ترتیبون سے لے اوسکا خوب امتحان کرے اور پہر اونکی توضیح کرے

(۲۰۹) مخروط مستدیر کا راس کرہ کے سطح مستدیر پر ہے اور اوسکا محور منطبق کرہ کی قطر پر ہے اور یہہ قطر اوس نقطہ پر گذرتا ہے تو کرہ اور مخروط مستدیر کے درمیان جو جسم مشترک ہے

او سے دریافت کرو

فرض کرو کہ کرہ کا نصف قطر ط ہے اور یہہ نصف زاویہ راس مخروط مسند بر کا ہے
اور جہ حجم مطلوب ہے تو قطبی مساوات کرہ کے اوس صورت مین کہ راس مخروط مسند بر کا مبدا ہو

لو = ۲ ط جم بر ہے اسواسطے

جہ = ۲کبمع ۲بمع ۲ط جم بر کمع لو جب بر ز بر سر ز بر ز لو

(۲۱۰) خط منحنی لو = ط (۱ + جم بر) خط ابتدائی کے گرد چکر کرتا ہے تو جو جسم پیدا ہو
اوسکا حجم دریافت کرو

یہان حجم مطلوب
= کبمع ۲کبمع ط (۱+جم بر) کبمع لو جب بر ز بر ز سر ز لو
= ۲کیہ ط۳ / ۳ کبمع (۱ + جم بر)۳ جب بر ز بر
= ۸کیہ ط۳ / ۳ کے دریافت ہوگا

امثلہ

(۱) اگر خط منحنی ن۲ (لا - ۴ ط) = ط لا (لا - ۳ ط) محور لا پر حرکت کرے تو حجم جو پیدا ہوگا
وہ لا = ۰ سے لا = ۳ ط تک کیہ ط۳ / ۲ (۱۵ - ۱۶ لوگ ۲) ہوگا

(۲) راس سے جو مماس نکالا جائے اوسکے اوپر خط تدویر چکر لگاتا ہے تو ثابت کرو
کہ جو حجم خط منحنی سے پیدا ہوگا ۲ کہ۲ ط۳ ہے

(۳) خط تدویر اپنے قاعدہ پر چکر کہاتا ہے تو ثابت کرو کہ خط منحنی سے جو حجم پیدا ہوتا ہے
۵ کہ۲ ط۳ ہے

(۴) خط منحنی ط۲ (۲ ط - لا) = لا۳ اپنی ممع الملاقات کے گرد چکر کرتا ہے تو ثابت کرو
کہ حجم جو پیدا ہوگا ۲ کہ۲ ط۳ ہے

(۵) خط منحنی لا ی۲ = ۴ ط۲ (۲ ط - لا) اپنی ممتنع الملاقات کے گرد چکر کرتا ہے تو ثابت کرو کہ

حجم جو پیدا ہوگا ۴ کر۲ ط۳ ہے

(۶) خط منحنی (ذ۲ - ص۲)۲ = ط۳ لا محور ی کے گرد چکر کھانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اوسکے حصہ مقید کا حجم دریافت کرو ماحصل $\frac{۲۵۶}{۳۱۵}$ کر ط۳

(۷) کرہ ناقص کے حجم کو ارتفاع اور اوسکے سروں کے نصف قطروں کے ارتفاع میں بیان کرو

ماحصل $\frac{\text{ک حہ}}{۶}$ [حہ۲ + ۳ (ن۲۱ + ن۲۲)]

(۸) اگر خط منحنی ی۲ = ۲ حم لا + ن لا۲ محور لا کے گرد حرکت کرے تو مجسم ناقص کا حجم دریافت کرو اور ثابت کرو کہ وہ

$\frac{\text{ک حہ}}{۲}$ (س۲ + س۲ - $\frac{۱}{۳}$ ن حہ۲) یا ک حہ (ن۲ + $\frac{\text{ن حہ}^۲}{۱۲}$) سے تعبیر ہوتا ہے

اسمیں حہ ارتفاع جسم ناقص کا ہے اور س اور س اور ن نصف قطر اوسکے سروں اور تراش متوسط کے ہیں اور صورت بیانیہ مخروط مستدیر اور کرہ بیضوی کی استنباط کرو

(۹) کلی اکائی کے عمل ہی اوس حجم کو دریافت کرو جو مابین مخروط مستدیر اور کرہ کے واقع ہو مخروط مستدیر کا زاویہ راس ۶۰° ہے اور کرہ کا قطر معلوم ہے اور وہ مخروط مستدیر کو دائرہ پر مس کرتا ہے

(۱۰) اگر مجسم قریب البیضوی کا راس قاعدہ میں ہو اور محور سطح مستدیر اسطوانہ میں تو اسطوانہ سطح مستدیر مجسم قریب البیضوی سے ایسی حصوں میں تقسیم ہوگا کہ اونمیں نسبت ۲ : ۱ کی ہوگی ارتفاع اور قطر قاعدہ اسطوانہ کا اور عرض مستقیم مجسم قریب البیضوی کا یہہ سب آپسمیں برابر ہیں

(۱۱) مجسم قریب البیضوی جو قریب البیضوی کی گردش سے پیدا ہو اور مخروط مستدیر قائم کا ایک ہی قاعدہ ایک ہی محور ایک ہی راس ہو اور اس محور کو قطر بنا کر ایک کرہ بنایا گیا ہے تو ثابت کرو کہ مخروط مستدیر اور مجسم قریب البیضوی کے حجم باہمی کو کرہ کے حجم سے وہ نسبت ہوگی جو عرض مستقیم قریب البیضوی کو قطر کرہ سے

(۱۲) جو مجسم اسے سطح سے احاطہ ہوا ہو جسکی مساوات

$\frac{لا^2}{ط^2} + \frac{ی^2}{ص^2} + \frac{ے^2}{س^2} = 1$ ہو

اوسکا کل حجم دریافت کرو ما حصل $\frac{8}{3}$ کہ ط ص س

(۱۳) جو مجسم ایسے سطح سے احاطہ ہوا ہو جسکی مساوات

$(لا^2 + ی^2 + ے^2)^3 = 27 ط^3$ لا ی ے ہو

اوسکا کل حجم دریافت کرو ما حصل $\frac{9}{2} ط^3$

(۱۴) محور لا کے گرد خط منحنی $(لا^2 + ی^2)^2 = ط^2 لا^2 + ص^2 ی^2$ کے چکر کہانے سے جو مجسم پیدا ہو اوسکا حجم دریافت کرو اور یہہ فرض کرو کہ ط بڑا ص سے ہے اور جب ط = ص تو بتلاؤ کیا نتیجہ ہوگا

ما حصل $\frac{کہ}{4}(2ط^2 + 3ص^2)ط + \frac{کہ ص^4}{4\sqrt{ط^2 - ص^2}}$ لوگ $\frac{ط + \sqrt{ط^2 - ص^2}}{ص}$

(۱۵) محور ی کے گرد خط منحنی $(لا^2 + ی^2)^2 = ط^2 لا^2 + ص^2 ی^2$ کے چکر کہانے سے جو مجسم پیدا ہو اوسکا حجم دریافت کرو اور یہہ فرض کرلو کہ ط بڑا ص سے ہے اور جب ط = ص تو بتلاؤ کیا نتیجہ پیدا ہوگا

ما حصل $\frac{کہ}{4}(2ص^2 + 3ط^2)ص + \frac{کہ ط^4}{4\sqrt{ط^2 - ص^2}}$ حبت$^{-1}$ $\frac{\sqrt{(ط^2 - ص^2)}}{ط}$

(۱۶) محور لا کے گرد خط منحنی $(ی^2 + لا^2)^2 = ط^2 (لا^2 - ی^2)$ کے چکر کہانے سے جو مجسم پیدا ہو اوسکا

ما حصل $\frac{کہ ط^3}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right.$ لوگ $\left.(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{3}\right]$

(۱۷) مجسم قریب البیضوی جو قریب البیضوی کی گردش سی پیدا ہوتا ہے اوسکا محور منطبق کرہ کے قطر پر ہے اور اوسکا راس کرہ سے باہر ہے تو جو مجسم قریب البیضوی کے باہر کرہ کا حصہ ہے اوسکا حجم دریافت کرو

ما حصل $\frac{کہ ھ^3}{4}$ اسمیں ھ فاصلہ اون دو سطوح مستوی کے مابین ہے جنمیں سطوح مستدیر کے قصل منحنی واقع ہیں

(۱۸) اوس حجم کو دریافت کرو جو سطح مستدیر

$\frac{ے^2}{س} + \frac{ی^2}{ص} = 2$ لا

مین سے ایک سطح مستوی متوازی سطح (ی و ے) کی ط کے فاصلہ پر اوسے قطع کرے

ماحصل کہ ط^۲ (س س)

(۱۹) بیضوی کے محور کلان کی سرے سے مماس نکالا گیا ہے اوسکے گرد رابعہ بیضوی چکر لگاتا ہے تو ثابت کرو کہ جو خط منحنی سے سطح مستدیر پیدا ہوگی اوسکے درمیان حجم

کی ط س^۲/۴ (۱۰ - ۳ ی) ہوگا

(۲۰) جن سطوح مستدیر کی تعریف معادلات

لا^۲ + ی^۲ = س ے اور لا^۲ + ی^۲ = ی لا اور ے = ۰ سے ہوتی ہے

اونکے مابین جو حجم احاطہ ہوتا ہو اوسکو دریافت کرو اور تجمیع کی ترقی کو شکلیں بنا کر بتلاؤ

ماحصل ۳ کی ط^۲ / ۳۲ س

(۲۱) اگر صر کوئی سطح مستدیر پر مقید ہو اور زص ایک جز ترکیبی صر کا نقطہ ع کے گرد تو کے فاصلہ پر نقطہ معین ط سے ہو اور نقطہ ع پر جو عمود المماس اندر کی طرف کھینچا جائے وہ نصف قطر دائرہ ط ع کے ساتھ زاویہ سر بناتا ہو تو ثابت کرو کہ سطح مستدیر کے اندر حجم

= ۱/۳ مج لو جم سر زصر

کل سطح مستدیر پر تجمیع پھیلائی گئی ہے

مجسم بیضوی کے مرکز کو نقطہ ط قرار دیکر اوپر کی صورت قانونیہ کے موافق حجم دریافت کرو اور کلی کے جملہ مراتب یعنی از روی علم ہندسہ کے بیان کرو

(۲۲) قیمت مج مج مج لا^۲ زلا زی زے کی مجسم بیضوی کے حجم پر دریافت کرو

ماحصل ۴/۱۵ کی ط ا^۳ ص ن

(۲۳) کلی کی حدود غائی تشخیص کرو تا کہ وہ حجم حاصل ہو کہ درمیان سطح مستوی (لا و ی) اور سطح مستدیر کے واقع ہو جسکی مساوات

ا لا^۲ + پ لا ی + س ی^۲ - د ے - ف = ۰

(۲۴) حدود غایئی اوس کی کی بیان کردہ جو صورت قانونیہ مع مع مع زلا زء زے کی استعمال مین اس مطلب کے واسطے کام مین اتی ہی کہ سطح وہ حجم معلوم ہو جو سطح مستدیر قصید درجۂ دوم کے اندر واقع ہو اور اس سطح کی مساوات یہہ ہے کہ

ط لا^۲ + ص ڈ^۲ + س ے^۲ + ۲ک ڈ ے + ۲ص ڈ لا ے + ۲ن لا ڈ = ۱

(۲۵) کلیات

مع مع مع زلا زء زے

مین کس حدود غائی کے درمیان لیجائین کہ حجم مابین مخروطی سطح مستدیر اور سطح مستوی کا معلوم ہو جاے اور سطح مستدیر کی مساوات

ے = ط - ۱ (لا^۲ + ڈ^۲) ہے

اور سطح مستوی کی مساواتین لا = ے اور لا = ۰ ہین اور اس ترکیب سے اور کسی اور ترکیب سے اس حجم کو دریافت کرو

(۲۶) دو سطوح مستدیر ے = م لا^۲ + ن ڈ^۲ اور ے = ط لا + ص ڈ کے درمیان جو مجسم سماتا ہو اوسکا حجم دریافت کرو اور ثابت کرو کہ حجم $\frac{\pi}{8}$ کے ہی جب

م = ن = ط = ص = ۱

(۲۷) ایک قعر اتنا ہی کہ اوسمین قرص مدور ایک پورا چکر لگاتا ہے اور اس قرص کا نصف قطر س ہے اور چکر کرنے مین مرکز قرص سے تو دائرہ مرتسم ہوتا ہی جسکا نصف قطر س ہے اور سطح قرص کی ہمیشہ متوازی ایک سطح قائم و معین کی رہتی ہی اور سطح دائرہ عمود ہوتی ہے اور یہہ دائرہ وہی جسپر مرکز حرکت کرتا ہی تو ثابت کرو کہ حجم قعر کا

$\frac{\pi س^۳}{۳}$ (۳ک + ۸) ہے

(۲۸) مخروط مستدیر قائم کا محور اسطوانہ کے پیدا کرنے والے خط پر منطبق ہے اور قطر مخروط مستدیر اور اسطوانہ کا برابر ارتفاع مشترک کے ہے تو مخروط مستدیر جن دو حصوں مین

اسطوانہ سے تقسیم ہوتا ہے اوسکا حجم اور سطح مستدیر دریافت کرو

حاصل سطوح مستدیر $\frac{۴ک ہ ۵\sqrt{۵} - ۳\sqrt{۱۵}}{۶}$ ط² اور $\frac{۲ک ہ ۵\sqrt{۵} + ۳\sqrt{۱۵}}{۶}$ ط² ہین

اور حجوم $\frac{۸ک + ۲۷\sqrt{۳} - ۶۴}{۹}$ ط³ اور $\frac{۶۴ - ۲۷\sqrt{۳} - ۲ک}{۹}$ ط³ ہین

اسمین ط نصف قطر مخروط مستدیر یا اسطوانہ کے قاعدہ کا ہے

(۲۹) مخروط فانہ کی شکل کا مساوات

$$ے^{۲} + \frac{ط^{۲} ی^{۲}}{لا^{۲}} = س^{۲}$$

سے تشخیص ہوتا ہے، اور سطوح لا = ۰ اور لا = ط کے درمیان واقع ہوتا ہے، اوسکا حجم دریافت کرو

حاصل $\frac{ک ہ س^{۲} ط}{۲}$

(۳۰) ایک خط مستقیم محور سے پر گذرتا ہے اور اوسپر عمودی ہے تراش مخروطی کا ایک حجم پیدا ہوتا ہے اور سطوح متوازیہ سے اوسکے دو تراشین کی گئی ہین اور دو کو سطوح متوازی محور سے کے ہین تو ثابت کرو کہ حجم تراش مخروطی کے مجسم کا سطوح مستوے کے درمیان برابر ہوتا ہے، حاصل ضرب سطوح مستوے کے فاصلہ اور تراشون کے نصف مجموعہ رقبون کے اور یہہ تراشین اون سطوح مستوے سے پیدا ہوتے ہین

نوان باب

کلی کی جزی بلحاظ کسی مقدار کے جو اوس کلی مین ملتف ہو

(۲۱۱) بعض اوقات یہہ ضرورت ان پڑتی ہے کہ کلی کی جزئی بلحاظ کسی مقدار کے جو اوس کلی مین ملتف ہو لین اب ہم اس مطلب سے بحث کرینگے

فرض کرو کہ سہ جزوی $\int_{ط}^{ص}$ مح (لا) نزلا کی بلحاظ ص کے مطلوب ہے اور مح (لا) مین ص داخل نہین ہے اور ط کو ص سے کچھہ تعلق نہین

فرض کرو کہ لو = $\int_{ط}^{ص}$ مح (لا) نزلا

اور ص بدل کر ص + ۵ ص ہوجاوے تو اس سبب سے لو بھی بدل کر لو + ۵ لو ہوجاویگا پس

لو + ∆ لو = ط^ص+∆ص^مع مج (لا) زلا

اسواسطے ∆ لو = ط^ص+∆ص^مع مج (لا) زلا ـ ط^ص^مع مج (لا) زلا

= ص^ص+∆ص^مع مج (لا) زلا

اب بموجب دفعہ ۲۰۷ کے

ص^ص+∆ص^مع مج (لا) زلا = ∆ ص مج (ص + بر ∆ ص)

اسمین بر کسر واجب ہے پس

∆ لو / ∆ ص = مج (ص + بر ∆ ص)

فرض کرو ∆ ص اور ∆ لو غیر متناہی کم ہوتی ہین پس

زلو / زص = مج (ص)

(۲۱۲) اسیطرح اگر لو کی جزی بلحاظ ط کے لین اور مج (لا) کو فرض کرین کہ اوسمین ط نہین ہے اور ص کو کچھہ تعلق ط سے نہین ہے تو یہہ حاصل ہوگا کہ

زلو / زط = ـ مج (ط)

(۲۱۳) فرض کرو کہ مج (لا) مین مقدار س شامل ہے اور مطلوب یہہ ہے کہ سرجزوی ط^ص^مع مج (لا) زلا کی بلحاظ س کے دریافت کرین اور ط اور ص کو کچھہ تعلق س سے نہین ہے، بجای مج (لا) کے اسانی کے لیئے ہم مج (لا و س) لکھتے ہین تا کہ مقدار س کا موجود ہونا صفائی کے ساتھہ ہمیشہ خیال مین رہے کلی کو لو سے تعبیر کرو تو

لو = ط^ص^مع مج (لا و س) زلا

فرض کرو کہ س کو س + ∆ س سے بدلین تو اس تبدل کے جہت سے لو بدل کر لو + ∆ لو ہوجایگا پس

لو + ∆ لو = ط^ص^مع مج (لا و س + ∆ س) زلا

اسواسطے ∆ لو = ط^ص^مع مج (لا و س + ∆ س) زلا ـ ط^ص^مع مج (لا و س) زلا

= حدود ط تا ص [مجھ (لا و س + ∆ س) − مجھ (لا و س)] ز لا

پس ∆ لو / ∆ س = حدود ط تا ص (مجھ (لا و س + ∆ س) − مجھ (لا و س)) / ∆ س ز لا

اب سر جزوی کی خاصیت کے موافق ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

(مجھ (لا و س + ∆ س) − مجھ (لا و س)) / ∆ س = ز مجھ (لا و س) / ز س + ق

اسمین ق ایسی مقدار ہے کہ جب س غیر متناہی کم ہوتا ہے تو وہ بھی غیر متناہی کم ہوتا ہے

پس اب یہہ حاصل ہوا کہ

∆ لو / ∆ س = حدود ط تا ص ز مجھ (لا و س) / ز س ز لا + حدود ط تا ص ق ز لا

اسمین جب ∆ س غیر محدود کم ہو تو دوسری کلی معدوم ہوتی ہے اسواسطے کہ وہ بڑی (ص − ط) ق سے نہیں ہی اسمین ق حتی الامکان نہایت بڑی قیمت ق کی لیے اور ق اخر کو معدوم ہوتا ہے

اسی معلوم ہوا کہ حد غائی کے لینے سے

ز لو / ز س = حدود ط تا ص ز مجھ (لا و س) / ز س ز لا

(۲۱۴) اس بات سے آگاہ رہنا چاہئے کہ دفعہ گذشتہ مین ط تا ص غیر متناہی ہی اگر کوئی مثلا ص غیر متناہی ہو تو ہم یہہ کہان کہہ سکتے ہین کہ (ص − ط) ق بالضرور حد غائی کے اندر معدوم ہوگا

(۲۱۵) دفعہ ۲۱۳ مین ہم ثابت کر چکے ہین کہ

ز / ز س حدود ط تا ص مجھ (لا و س) ز لا = حدود ط تا ص ز مجھ (لا و س) / ز س ز لا . . . (۱)

اب اس مساوات کا محل استعمال بتلاتے ہین اور اوسکے فائدے جتلاتے ہین

فرض کرو کہ مجھ (لا و س) ایسا جملہ ہی جسکا سر جزوی بلحاظ لا کے مجھ (لا و س) ہی اور مجھ (لا و س) ایسا جملہ ہی جسکا سر جزوی بلحاظ لا کے ز مجھ (لا و س) / ز س ہی پس (۱) کو اسطرح لکھ سکتے ہین کہ

ز مجھ (ص و س) / ز س − ز مجھ (ط و س) / ز س = حصر (ص و س) − حصر (ط و س) . . . (۲)

فرض کرو کہ مجھ (لا و س) مین ص نہین واقع ہوتا اور ط کو کچھ تعلق ص سے نہین ہی تو (۲) کو اسطرح لکھ سکتے ہین کہ

$$\frac{ز رمج (ص و س)}{ز س} + س = صر (ص و س) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (۳)$$

اسمین س وہ ارقام ہین جو ص سے کچھہ علاقہ نہین رکھتین یعنی مستقل بلحاظ ص کے ہین اسی معلوم ہوا کہ ص کی جو قیمت چاہین (۳) مین ہو سکتی ہی ص کی جگہ لا کو رکھہ سکتے ہین اور اسطرح لکھہ سکتے ہین

$$صر (لا و س) = \frac{ز رمج (لا و س)}{ز س} + س \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (۴)$$

اس مساوات کو صر (لا و س) کے دریافت کرنے کے اندر کام مین لا سکتے ہین چونکہ مقدار مستقل بہ ضرورت کے صورت مین داخل ہو سکتی ہے اسلئے اوسکو خارج کر دیتے ہین اور مساوات (۴) کو اسطرح لکھتے ہین کہ

$$مع \ \frac{ز مج (لا و س)}{ز س} \ زلا = \frac{ز}{ز س} \ مع \ مج \ (لا و س) \ زلا$$

مثلاً فرض کرو کہ $مج \ (لا و س) = \frac{۱}{۱ + س^۲ لا^۲}$ تو

$$مع \ مج \ (لا و س) \ زلا = مع \ \frac{زلا}{۱ + س^۲ لا^۲} = \frac{۱}{س} \ مس^{-۱} \ س \ لا$$

$$پس \ \frac{ز}{ز س} \left(\frac{۱}{س} \ مس^{-۱} \ س \ لا \right) = مع \ \frac{ز}{ز س} \left(\frac{۱}{۱ + س^۲ لا^۲} \right) زلا$$

$$= - مع \ \frac{۲ س لا^۲}{(۱ + س^۲ لا^۲)^۲} \ زلا$$

پس قیمت $مع \ \frac{زلا}{۱ + س^۲ لا^۲}$ کے معلوم ہونے سے ہم استنباط جزئی یعنی زیادہ پیچیدار کلی $مع \ \frac{لا^۲}{(۱ + س^۲ لا^۲)^۲}$ کا استنباط کر سکتے ہین

(۲۱۶) $مع_ط^ص \ مج \ (لا و س) \ زلا$ کا سر جزوی نکالنا بلحاظ س کے اوس حالت مین کہ ط اور ص جملے س کے ہین دریافت کرنا مطلوب ہے کلی کو لو سے تعبیر کرو تو $\frac{ز لو}{ز س}$ مین تین قسمین ہین ایک قسم تو اس سبب سے پیدا ہوتی ہی کہ مج (لا و س) مین س داخل ہے اور دوسری اس سبب سے پیدا ہوتی ہے کہ ص مین س داخل ہی اور تیسری اس سبب سے کہ ط مین س داخل ہے اسے معلوم ہوا کہ بموجب دفعات گذشتہ کے عمل کرنے سے

$$\frac{ز لو}{ز س} = مع_ط^ص \ \frac{ز مج (لا و س)}{ز س} \ زلا + \frac{ز لو}{ز ص} \ \frac{ز ص}{ز س} + \frac{ز لو}{ز ط} \ \frac{ز ط}{ز س}$$

$$= مع_ط^ص \ \frac{ز مج (لا و س)}{ز س} \ زلا + مج \ (ص و س) \ \frac{ز ص}{ز س} - مج \ (ط و س) \ \frac{ز ط}{ز س}$$

اسمین ا کوئی مقدار مستقل ہے پس اخر کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{مج (لا)} = \text{ا لا}^{-1}$$

اسے خط منحنی مطلوب تشخیص ہوتا ہے

(۲۲۰) مج (لا) کی اسی صورت دریافت کرو کہ س کے تمام قیمتون کے واسطے

$$\frac{\text{تباسع لا [مج (لا)]}^{2}\ \text{زلا}}{\text{تباسع [مج (لا)]}^{2}\ \text{زلا}} = \frac{\text{س}}{\text{ن}}$$

اور بموجب فرض کے

$$\text{تباسع لا [مج (لا)]}^{2}\ \text{زلا} = \frac{\text{س}}{\text{ن}}\ \text{تباسع [مج (لا)]}^{2}\ \text{زلا}$$

اب بلحاظ س کے سرجزوی لو تو

$$\text{س [مج (س)]}^{2} = \frac{1}{\text{ن}}\ \text{تباسع [مج (لا)]}^{2}\ \text{زلا} + \frac{\text{س}}{\text{ن}}\ \text{[مج (س)]}^{2}$$

$$\text{پس س} \left(1 - \frac{1}{\text{ن}}\right) \text{[مج (س)]}^{2} = \frac{1}{\text{ن}}\ \text{تباسع [مج (لا)]}^{2}\ \text{زلا}$$

پھر بلحاظ س کے سرجزوی لو تو

$$\left(1 - \frac{1}{\text{ن}}\right) \text{[مج (س)]}^{2} + 2\text{س} \left(1 - \frac{1}{\text{ن}}\right) \text{مج (س) مج}' \text{(س)} = \left[\frac{\text{مج (س)}}{\text{ن}}\right]^{2}$$

$$\text{اسی معلوم ہوا کہ} \left(1 - \frac{2}{\text{ن}}\right) \text{مج (س)} + 2\text{س} \left(1 - \frac{1}{\text{ن}}\right) \text{مج}' \text{(س)} = 0$$

$$\text{اسواسطے} \quad \frac{\text{مج}' \text{(س)}}{\text{مج (س)}} = \frac{\text{ن} - 2}{2(\text{ن} - 1)} \cdot \frac{1}{\text{س}}$$

کلی لو تو

$$\text{لوگ مج (س)} = \frac{\text{ن} - 2}{2(\text{ن} - 1)}\ \text{لوگ س} + \text{مقدار مستقل}$$

$$\text{اسواسطے مج (س)} = \text{ا س}^{\frac{\text{ن} - 2}{2(\text{ن} - 1)}}$$

اسمین ا کوئی مقدار مستقل ہے پس اخر کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{مج (لا)} = \text{ا لا}^{\frac{\text{ن} - 2}{2(\text{ن} - 1)}}$$

یہہ علم ادوات تحلیلیہ کے اس سوال کا حل ہی کہ جسم مستدیر کے قطعہ کے مرکز ثقل کا بعد راس سے

$\frac{۱}{ن}$ وان حصہ ارتفاع قطعہ کا ہے تو وہ خط منحنی دریافت جسکی حرکت سے مجسم مستدیر پیدا ہوتا ہے

مساوات مطلوب ی = مج (لا) ہے

(۲۲۱) مج (لا) کی وہ صورت دریافت کرو کہ کلی ∫ س ا مج (لا) زلا / √(س − لا) بالکل بے تعلق س سے ہو فرض کرو کہ مج (لا) بے تعلق س سے ہے

کلی کو لو سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ لا = س ے تو

لو = ∫ س ا مج (لا) زلا / √(س − لا) = ∫ ا √س مج (س ے) زے / √(ا − ے)

چونکہ لو بے تعلق س سے ہی تو سر جزوی لو کا بلحاظ س کے معدوم ہو جائیگا اب

زلو / زس = ∫ ا [مج (س ے) / ۲√س + ے √س مج' (س ے)] زے / √(ا − ے) = ∫ س ا (مج (لا) + ۲ لا مج' (لا)) / (۲ √س √(س − لا)) (۳)

خواہ س کچہ ہی ہو یہہ اخر کلی معدوم ہوگی اگر مج (لا) بالکل بے تعلق س سے نہ ہو تو یہہ کچہ ضرور نہ ہوگا کہ مج (لا) + ۲ لا مج' (لا) ہمیشہ معدوم ہی ہو اسواسطے کہ ایسی ایک کلی جیسے ∫ س مج جم لا / √(س − لا) زلا ہی معدوم ہوتی ہی خواہ س کی کچہہ ہی قیمت ہو لیکن اس سبب سی کہ مج (لا) بے تعلق س سے فرض کیا گیا ہے یہہ حاصل ہونا چاہے کہ

مج (لا) + ۲ لا مج' (لا) = ۰

وجہ اسکی یہہ ہے کہ فرض کرو مج (لا) + ۲ لا مج' (لا) ہمیشہ صفر نہ ہو تو لا صفر سے زیادہ ہوتا ہے تو علامت مج (لا) + ۲ لا مج' (لا) میں کچہ تغیر بعض لون کے اندر نہیں واقع ہوگا اور یہہ لون موقوف س پر نہ ہوگا مثلاً یہہ تغیر لا = ط تک نہ واقع ہو تو کلی

∫ ط ا (مج (لا) + ۲ لا مج' (لا)) / (۲ √ط √(ط − لا)) زلا معدوم نہیں ہو سکتی کیونکہ ہر جز ترکیبی کی ایک ہی علامت ہے

اسی معلوم ہوا کہ مج (لا) + ۲ لا مج' (لا) صفر ہونا چاہیے

اسواسطے مج' (لا) / مج (لا) = − ۱/۲لا

اسواسطے لوگ مج (لا) = − ½ لوگ لا + مقدار مستقل

اسواسطے مج (لا) = ا / √لا

اسمین ا کوئی مقدار مستقل ہے

یہہ علم حرکت کے اس سوال کا حل ہے کہ ایسا خط منحنی دریافت کرو کہ خط منحنی کے قوس پر گرنے کا وقت کسی نقطہ سے سب سے نیچی کے نقطہ تک ایک ہی ہو اگر صو قوس خط منحنی ہو جو سب سے نیچی کے نقطہ سے ناپا گیا ہو اور لا افقی ممتد طرف صو کا ہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\text{ز صو}}{\text{ز لا}} = \text{نج}(\text{لا}) \quad \text{اور صو} = ۲\sqrt{\text{ا لا}}$$

پس خط منحنی خط تدویر ہے (دفعہ ۷۲)

امثلہ مختلفہ

(۱) اگر خط مستقیم ص ع۱ ع۲ ع۳ خط تجاپن متساوی الزوایا کی تین متواتر حکیرون سے ملے اور مساوات خط تجاپن کی لو = ط^ئ نقاط ع۱ اور ع۲ اور ع۳ پر ہو تو ش ع۱ ع۲ اور ش ع۲ ع۳ اور دو خطوط منحنی ع۱ ع۲ اور ش ع۲ ع۳ کے درمیان جو رقبہ واقع ہو اوسے دریافت کرو

$$\text{حاصل} \quad \frac{۱}{۴ \,\text{لوک ی ج}} \left(\text{ع}_۳^۲ - \text{ع}_۱^۲\right)$$

(۲) خط منحنی $\text{ی}^۴ - \text{ط لا ی}^۲ + \text{لا}^۴ = ۰$ کا رقبہ دریافت کرو

$$\text{حاصل} \quad \frac{\text{ط}^۲ \text{ک}\sqrt{۲}}{۱۶}$$

(۳) خط منحنی $\text{لا}^{۲ن} + \text{ی}^{۲ن} = \text{ط}^۲ (\text{لا ی})^{ن-۱}$ کا رقبہ دریافت کرو اسمین ن مثبت صحیح ہے

حاصل اگر ن جفت صحیح ہو تو $\frac{\text{ط}^۲ \text{ک}}{۲ \text{ن}}$ اگر ن طاق صحیح ہو تو $\frac{\text{ط}^۲ \text{ک}}{\text{ن}}$

(۴) ایک بیضہ کے احاطہ کے برابر طول ایک رسے کا ہے اور رسے اس بیضہ پر لپیٹی گئی ہے اور کسی نقطہ پر سے رسے کھول کر لف بنایا جاتا ہے تو ثابت کرو کہ جب طول لف کا حد غائی زیادتی کی یا کمی کی پہنچتا ہو تو طول رسے کا برابر دائرہ انحناء کے محیط کے ہوگا یہہ دائرہ انحناء اوس نقطہ کا ہے جس پر سے رسی کہلتی ہے

(۵) اسطوانہ $\text{لا}^۲ + \text{ی}^۲ - \text{لو لا} = ۰$ کا حصہ جو دو سطح

ط لا + ص ی + س ے = ۰ اور طَ لا + ص ی + س ے = ۰ کے درمیان واقع ہو
اوسے دریافت کرو

$$\text{ماحصل}\ \frac{\text{کہ}(\text{طَ}-\text{ط})\,\text{لو}^{3}}{8\,\text{س}}$$

(٦) مجسم قریب البیضوی ی² + ے² = ٤ ط (لا + ط) اور کرہ لا² + ی² + ے² = س²
سے جو مجسم احاطہ ہوتا ہے اوسکا حجم دریافت کرو ماحصل ٢ کہ ط (س² − ط²/٢)

دسوان باب

بیضوی کلیات

(٢٢٢) کلیات سع $\frac{\text{زبر}}{\sqrt{(1-\text{س}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{بر})}}$ د سع $\sqrt{(1-\text{س}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{بر})}$ زبر
اور سع $\frac{\text{زبر}}{(1+\text{ط}\,\text{جب}^{2}\,\text{بر})\sqrt{(1-\text{س}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{بر})}}$ کو بیضوی جملے یا بیضوی کلیات
اول اور دوم اور سوم مرتبے کا کہتے ہین اول مرتبہ ح (س و بر) سے اور دوم مرتبہ
می (س و بر) سے اور سوم مرتبہ ھب (س و ط و بر) سے تعبیر ہوتا ہے کلیات
حدود نمائی ۰ اور بر کے اندر لی گئی ہین اس سبب سے کلی بر کے ساتھہ معدوم ہوتی ہے اور
بر کو وسعت جملہ کہتے ہین اور مقدار مستقل س واحد سے کم فرض کی گئی ہے اور اوسکو
قالب جملہ کا کہتے ہین اور مقدار جو تیسری مرتبہ کے جملہ واقع ہوتی ہے مقدار مستقلہ کہلاتی ہے
پس جب حدود نمائی ۰ اور کہ/٢ کے درمیان کلیات لی جائین تو اونکو کامل جملے کہتے ہین
یعنی وسعت جملہ کامل کی کہ/٢ ہے

(٢٢٣) دوسری مرتبہ کا بیضوی جملہ اوس قوس بیضوی کا طول تعبیر کرتا ہے جو طرف
کلان سے پیمایش کیا جاے اور بیضوی کے نسبت خارج المرکزی قالب جملہ کا ہو یہی وجہ تسمیہ بیضوی
جملون کے ہی اور سواے اسکے یہہ بات بھی ہے کہ ان تینون کلیون کا ارتباط بیضوی
کی عجیب خاصیتون کے نسبت سے ہوا ہے

(٢٢٤) مسئلہ بیضوی کلیات کا اور اوسکی تحقیقات کا ایک جز علم حساب الکلیات کا ہے

اور اوسپر اخر زمانہ مین بہت توجہ ہوئی ہے اوسکے ہم چند نتایج اسان اسان تحریر کرینگے اگر اس مضمون کی تحصیل کسی کو زیادہ منظور ہو تو وہ بعض اور کتابون کو دیکھے جنمین یہہ مضمون بسط کے ساتھہ لکھا ہے

(۲۲۵) اگر بر اور سر اس مساوات مین مربوط ہون کہ

ح (س و بر) + ح (س و سر) = ح (س و لب)

اسمین لب ایک مقدار مستقل ہے تو

جم بر جم سر − جب بر جب سر √(۱ − س۲ جب۲ لب) = جم لب

بر اور سر کو ایک نئی مقدار طو کے جملہ ٹھہراؤ اور مساوات معلوم کے جزئی لو تو

۱ / (√(۱ − س۲ جب۲ بر) زطو) + ۱ / √(۱ − س۲ جب۲ سر) · زسر / زطو = ۰   (۱)

اب چونکہ طو ایک جدید اختیاری مقدار متغیر ہے تو یہہ فرض کر لینے کا اختیار ہے کہ

زبر / زطو = √(۱ − س۲ جب۲ بر)

مساوات (۱) سے

زسر / زطو = − √(۱ − س۲ جب۲ سر)

ان دو مساواتون کا مجذور کرو اور جزئی نکالو تو

ز۲بر / زطو۲ = − س۲ جب بر جم بر ، ز۲سر / زطو۲ = − س۲ جب سر جم سر

اسواسطے ز۲(بر ± سر) / زطو۲ = − س۲/۲ (جب ۲بر ± جب ۲سر)

فرض کرو کہ بر + سر = صح اور بر − سر = صر پس

ز۲صح / زطو۲ = − س۲ جب صح جم صر اور ز۲صر / زطو۲ = − س۲ جب صر جم صح

اور نیز زصح / زطو · زصر / زطو = (زبر / زطو)۲ − (زسر / زطو)۲ = − س۲ جب صح جب صر

اسواسطے (ز۲صح / زطو۲) / (زصح / زطو · زصر / زطو) = جم صر اور (ز۲صح / زطو۲) / (زصح / زطو · زصر / زطو) = جم صح

اسواسطے $\frac{ر}{زطو}$ (لوگ $\frac{زصح}{زطو}$) = $\frac{ز}{زطو}$ لوگ جب صر اور $\frac{ز}{زطو}$ (لوگ $\frac{زصے}{زطو}$) = $\frac{ز}{زطو}$ لوگ جب صر

اسواسطے لوگ $\frac{زصح}{زطو}$ = لوگ جب صر + مقدار مستقل

اسواسطے $\frac{زصح}{زطو}$ = ا جب صر
اسی کے متشابہ $\frac{زصے}{زطو}$ = ب جب صر . . . . (۲)

اسمین ا اور ب مقادیر مستقل ہین

اسی معلوم ہوا کہ ا جب صر $\frac{زصے}{زطو}$ = ب جب صح $\frac{زصح}{زطو}$

اسواسطے ا جم صر = ب جم صح + س . . (۳)

اب اصل مساوات معلوم مین ہم دیکھتے ہین کہ اگر سر = ۰ ہو تو

ح (س و بر) = ح (س و لب)

اسواسطے بر = لب اور صر = صح = لب

پس (۳) سے (ا - ب) جم لب = س

تو ا جم (بر - سر) = ب جم (بر + سر) + (ا - ب) جم لب

اسواسطے

(ا - ب) جم بر جم سر + (ا + ب) جب بر جب سر = (ا - ب) جم لب . . (۴)

(۲) مین $\frac{زصح}{زطو}$ کی قیمت

$\sqrt{}$ (ا - س^۲ جب^۲ بر) - $\sqrt{}$ (ا - س^۲ جب^۲ سر)

اور $\frac{زصے}{زطو}$ کی قیمت

$\sqrt{}$ (ا - س^۲ جب^۲ بر) + $\sqrt{}$ (ا - س^۲ جب^۲ سر) رکہو

اور پہر فرض کرو کہ سر = ۰ تو

$\sqrt{}$ (ا - س^۲ جب^۲ لب) - ۱ = ا جب لب

اور $\sqrt{}$ (ا - س^۲ جب^۲ لب) + ۱ = ب جب لب

ا - لب اور ا + لب کو (۴) مین رکھو تو

جم بر جم سر - جب بر جب سر ہا (ا - س۲ جب۲ لب) = جم لب

(۲۲۶) یہہ ربط جو ابہی دریافت ہوا ہے وہ ایک اور مختلف صورت مین بیان ہو سکتا ہے

ساوات کو جذرون سے پاک صاف کرو تو

(جم بر جم سر - جم لب)۲ = (ا - س۲ جب۲ لب) جب۲ ز جب۲ سر

اسواسطے

جم۲ بر + جم۲ سر + جم۲ لب - ۲ جم ۲ جم سر جم لب

= ا - س۲ جب۲ لب جب۲ بر جب۲ سر

جم۲ سر جم۲ لب کو طرفین پر زیادہ کرو اور منتقل کرو تو

(جم بر - جم سر جم لب)۲

= ا - جم۲ سر - جم۲ لب + جم۲ سر جم۲ لب - س۲ جب۲ لب جب۲ بر جب۲ سر

= جب۲ سر جب۲ لب (ا - س۲ جب۲ بر)

اسواسطے جم بر = جم سر جم لب + جب سر جب لب ہا (ا - س۲ جب۲ بر)

مثبت علامت جذر کی لینی چاہئے کیونکہ جسوقت بر = ۰ سر = لب کے حاصل ہوگا

(۲۲۷) اب ہم یہہ بیان کرتے ہین کہ بیضوی جملہ اول مرتبہ کا کسطرح مختلف قالب کے جملہ کے ساتھہ مربوط ہوتا ہے

فرض کرو کہ ج (س و بر) جملہ کو تعبیر کرے

پس بر = $\frac{\text{جب ۲ سر}}{\text{س + جم ۲ سر}}$ کے فرض کرو

تو $\frac{1}{\text{جم۲ بر}}$ $\frac{\text{ز بر}}{\text{ز سر}}$ = $\frac{\text{۲ (ا + س جم ۲ سر)}}{\text{(س + جم ۲ سر)}^2}$

اسواسطے $\frac{\text{ز بر}}{\text{ز سر}}$ = $\frac{\text{۲ (ا + س جم ۲ سر)}}{\text{ا + ۲ س جم ۲ سر + س۲}}$

اور $۱ - س^۲ جب^۲ بر = ۱ - \frac{س^۲ جب^۲ ۲ سر}{۱ + ۲ س جم ۲ سر + س^۲}$

$= \frac{۱ + ۲ س جم ۲ سر + س^۲ جم^۲ ۲ سر}{۱ + ۲ س جم ۲ سر + س^۲}$

اسواسطے

$\frac{ر بر}{\sqrt{(۱ - س^۲ جب^۲ بر)}} = \frac{۲ (۱ + س جم ۲ سر)}{۱ + ۲ س جم ۲ سر + س^۲} \cdot \sqrt{(۱ + ۲ س جم ۲ سر + س^۲)}$ مع $\frac{ر سر}{۱ + س جم ۲ سر}$

$= ۲$ مع $\frac{ر سر}{\sqrt{(۱ + ۲ س جم ۲ سر + س^۲)}} = \frac{۲}{۱ + س}$ مع $\frac{ر سر}{\sqrt{(۱ - \frac{۴ س}{(۱ + س)^۲} جب^۲ سر)}}$

مقدار مستقل زیادہ نہین کی گئی ہے کیونکہ سر معدوم بر کے ساتھہ ہوتا ہے بس

$ح (س و بر) = \frac{۲}{۱ + س} ح (س_۱ و سر)$ اسمین

$س_۱^۲ = \frac{۴ س}{(۱ + س)^۲}$ اور مس بر $= \frac{جب ۲ سر}{س + جم ۲ سر}$

اس اخرار تباط کو اسطرح لکہ سکتے ہین کہ

$س$ جب بر $=$ جب $(۲ سر - بر)$

$س_۱$ بڑا بہ نسبت س کے ہے پس اسواسطے

$\frac{س_۱^۲}{س^۲} = \frac{۴}{س (۱ + س)^۲}$

اور چونکہ س چہوٹا واحد سے ہے تو ۴ بڑا بہ نسبت س $(۱ + س)^۲$ کے ہے

اگر سر $= \frac{ک}{۲}$ تو بر $=$ ک پس

$\frac{۲}{۱ + س} ح (س_۱ و \frac{ک}{۲}) = ح (س و ک) = ۲ ح (س و \frac{ک}{۲})$

(۲۲۸) اس مضمون مین ایک اور مسئلہ لکہتے ہین اور وہ یہہ ہے کہ بیضوی جملہ مرتبہ دوم کا ارتباط مثل جملیاء مرتبہ اول دفعہ ۲۲۵ کے لکہین

اگر جم بر جم سر $-$ جب بر جب سر $\sqrt{(۱ - س^۲ جب^۲ لب)} =$ جم لب

تو می (س و بر) $+$ می (س و سر) $-$ می (س و لب) $= س^۲$ جب بر جب سر جب لب

مساوات معلوم کے سبب سے جو جملون کی دستون کو مربوط کر رہی ہے ہم یہہ فرض کرتے ہین کہ

می (س و بر) $+$ می (س و سر) $-$ می (س و لب) $=$ ج (بر)

جزی لو تو

ح َ بر = ہ۱ (۱ − س۲ جب۲ بر) + ہ۱ (۱ − س۲ جب۲ بر) ز بر / ز بر

= جم بر − جم سر جم لب / جب سر جب لب + جم سر − جم بر جم لب / جب بر جب لب ز بر / ز بر بموجب دفعہ ۱۲۶ کے

= ز (جب۲ بر + جب۲ سر + ۲ جم بر جم سر جم لب) / ز بر × ۱ / ۲ جب بر جب سر جب لب

لیکن جب۲ بر + جب۲ سر + ۲ جم بر جم بر جم لب

= ۱ + جم۲ لب + س۲ جب۲ بر جب۲ سر جب۲ لب

پس ح َ (بر) = س۲ جب لب ز (جب بر جب سر) / ز بر

اسواسطے کلی لینی سے

ح (سر) = س۲ جب بر جب سر جب لب

کوئی مقدار مستقل نہیں زیادہ کی گئی ہے کیونکہ ح (بر) بظاہر بر کے ساتھہ معدوم ہوتی ہے

اگر لب = − ط/۲ تو ماحصل مطابق دفعہ ۹۲ کے مسئلہ فیک نینی کے ہوگا اور

یہہ بات اسانی سے ہمارے بعض تشریحات کے لکھنے سے سمجھہ مین اجائیگی

دفعہ ۹۲ کے موافق یہہ ارتباط حاصل ہے کہ

ی۲ لا۲ لاَ۲ − ط۲ (لا۲ + لاَ۲) + ط۴ = ۰

اسمین لا = ط جم بر / ہ۱ (۱ − ی۲ جب۲ بر) اور لا = ط جم برَ / ہ۱ (۱ − ی۲ جب۲ برَ)

اسسے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ی۲ جب۲ بر جب۲ برَ − جم۲ بر (۱ − ی۲ جب برَ) − جب۲ برَ (۱ − ی۲ جب۲ بر)

+ (۱ − ی۲ جب۲ بر) (۱ − ی۲ جب۲ برَ) = ۰

یعنی ی۴ جب۲ بر جب۲ برَ + ی۲ (۱ − جب۲ بر − جب۲ برَ − جب۲ بر جب۲ برَ)

+ جب۲ بر + جب۲ برَ − ۱ = ۰

یعنی ی۲ (ی۲ − ۱) جب۲ بر جب۲ برَ + (ی۲ − ۱) (۱ − جب۲ بر − جب۲ برَ) = ۰

یعنی ی۲ جب۲ بر جب۲ بر‌ + ۱ − جب۲ بر − جب۲ بر‌ = ۰

اس ارتباط کو اس صورتون مین رکہہ سکتے ہین کہ

(۱ − ی۲) جب۲ بر جب۲ بر‌ = جم۲ بر جم۲ بر‌

جب۲ بر = جم۲ بر‌ ⁄ (۱ − ی۲ جب۲ بر‌)

جب۲ بر‌ = جم۲ بر ⁄ (۱ − ی۲ جب۲ بر)

امثلہ متفرقہ

(۱) مساوات جس سطح مستدیر کی

ے۲ = ۲ط لا ی ⁄ (لا۲ + ی۲) − (لا۲ + ی۲)

اسے جو مجسم احاطہ ہوا اوسکو دریافت کرو

ماحصل اگر جذر کے علامت کے ساتہہ مثبت کی قید لگائین تو ک ط۳ ⁄ ۴

(۲) سطح جسکی مساوات

(لا ⁄ ط)^۲⁄۳ + (ی ⁄ ص)^۲⁄۳ + (ے ⁄ س)^۲⁄۳ = ۱ ہو

اوسے جو مجسم احاطہ کیا جاے اوسے دریافت کرو ماحصل ۴ک ط ص س ⁄ ۳۵

(۳) ایک سطح مستدیر کی مساوات

لا ے + ط ی۲ = ے (ط۲ − ے۲) ہی

اور جو مجسم اسے احاطہ ہوتا ہے اوسکے اوس حصہ کا حجم جو سطح مستوی لا ی کی مثبت جانب مین واقع ہے

ثابت کرو کہ ۸ک ط۳ ⁄ ۲۱ ہے

(۴) قیمت مع زحصر ⁄ لو ع دریافت کرو اسمین زحصر جزء ترکیبی سطح مستدیر کرہ کو تعبیر کرتا ہے اور

لو اس جزء ترکیبی کا بعد ایک نقطہ معین سے ہے اور یہہ نقطہ باہر کرہ سے ہے

اور کلی تمام سطح مستدیر کرہ پر پہیلتی ہے

ماحصل ۴ک ط ⁄ س (ن − ۲) [۱ ⁄ (س − ط)^ن−۲ − ۱ ⁄ (س + ط)^ن−۲] اسمین ط نصف قطر

کرہ کا اور س بعد نقطہ معین کا مرکز کرہ سے ہے

(۵) ایک اسطوانہ ایک ہی حلقہ خط منحنی لو = طجم ن بر بر بنایا گیا ہے اور اسطوانہ کے پیدا کرنے والے خطوط مستقیم عمود خط منحنی کے سطح مستوی پر ہیں کرہ لا۲ + ی۲ + ے۲ = ط۲ کے سطح مستدیر کے اوس حصہ کو جو اسطوانہ کے اندر سماتی ہے اور جتنا اسطوانہ کرہ کے اندر سماتا ہو اوسکا حجم دریافت کرو

ماحصل رقبہ = ۴ط۲/ن (π/۲ − ۱)

حجم = ۴ط۳/۳ن (π/۲ − ۲/۳)

(۶) خط منحنی لا۳ − ۳ط لا ی + ی۳ = ۰

کے حصہ مقید کے چکر کہانے سے جو مجسم پیدا ہو اوسکا حجم دریافت کرو اور یہہ چکر خط مستقیم لا + ی = ۰ پر لگہا ہے

(۷) دو برابر مدور اسطوانین ہیں اور اونکا نصف قطر ط ہے

اگر اونکے محور زاویہ صہ پر قطع کریں تو حجم مشترک دونوں کے اندر ۱۶/۳ ط۳/جب صہ ہوگا

اور سطح مستدیر جو ایک کی دوسرے کی اندر سماتی ہے ۸ط۲/جب صہ ہوگی

(۸) دائرہ متغیر کا مرکز ایک دائرہ معین کے محیط پر گردش کرتا ہے اور سطح مستوی عمود الماس دائرہ معین کی ہے اور اوسکا نصف قطر برابر اوس بعد کے ہے جو مرکز قطر معین سے رکہتا ہے تو جو حجم پیدا ہوتا ہے اوسکو دریافت کرو اور سطح جو مجسم پیدا ہوتا ہے وہ قطر معین کے گرد چکر کرے تو ثابت کرو جو مجسم کا حصہ اندر چلا جائیگا اوسکو کل مجسم سے نسبت ۵ اور ۲ کی ہوگی

(۹) دائرہ معلوم کا نصف قطر = ط اور اسکے قطر پر مرکز مسدس منتظم کا حرکت کرتا ہی اور سطح مسدس کی عمود اس قطر پر ہی اور اوسکے مقدار اسطرح سے متغیر ہوتی جاتی ہے کہ اوسکے وتروں میں سے ایک وتر دائرہ کے وتر پر منطبق ہوتا ہے ثابت کرو کہ مجسم جو پیدا ہوتا ہے وہ ۲۰ و ۳۶ ط۳ ہے ثابت کرو کہ سطح مستدیر مجسم کی

$ط^۲ (۲ک + ۳ \sqrt{۳})$ ہے

(۱۰) ثابت کرو کہ

$\int_0^{ط} مح \frac{ر لا}{\sqrt{(۲ طلا - لا^۲)} \sqrt{(ط^۲ - لا^۲)}} = \frac{۲}{۳ ط^۲} ح(س و کہے)$ اسمین س = $\frac{۱}{۳}$

گیارہواں باب

اضعاف کلی میں تغیر مقادیر متغیر کا

(۲۲۹) دفعہ ۲۱۶ میں ہم نے لکھا ہے کہ کلی مثناۃ

$\int_{ط}^{ص} مع \int_{ع}^{ص} مح (لا و ی)$ زلا زی کی برابر $\int_{ع}^{ص} مع \int_{ط}^{ص} مح (لا وی)$ زی زلا کی ہے بشرطیکہ حدود غائی مستقل ہوں یعنی کلی لینی کی ترتیب کی بدل دینے سے دونو کلیوں کی حدود غائی میں کوئی تغیر نہیں پیدا ہوتا ہے مگر جس حالت میں کہ اول کلی حدود غائی جملے کسی اور مقدار متغیر کے ہوں تو دعوی مذکور ہمارا مستحکم نہیں رہتا چنانچہ اسکا بیان ساتویں اور آٹھوین باب میں کیا گیا ہے اب ہم بعض اور مثالیں زائد لکھتے ہیں

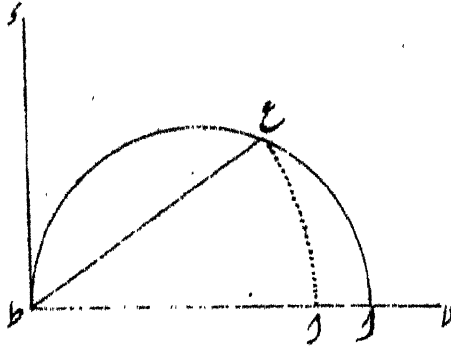
(۲۳۰) کلی $\int_0^{ط} مع \int_0^{\sqrt{ط^۲ - لا^۲}} مح (لا و ی)$ زلا زی میں ترتیب کو بدلو

کلی جو بلحاظ ی کے لی جاے اوسکی حدود غائی ی = ۰ اور ی = $\sqrt{(ط^۲ - لا^۲)}$ ہیں یعنی ہم کلی کو یہہ خیال کرتے ہیں کہ وہ محور لا سے دائرہ کے احاطہ تک پہلتی ہے اور اس دائرہ کا مرکز مبدء ہے اور نصف قطر برابر ط کے ہے پس کلی بلحاظ لا کے محور ی سے ربع کے انتہا کے نقطہ تک پہلتی ہے پس اگر ء = مح (لا وی) کو مساوات سطح متدیر کی

خیال کریں تو اوپر کی کلی تناہ اوس مجسم کے حجم کو تعبیر کرتا ہے جو سطح مستدیر اور سطح مستوی (لا دی) کے اور ایک خط مستقیم کے درمیان واقع ہوتا ہے اور یہہ خط مستقیم اس سطح مستوی پر عمود وار گرد احاطہ ط ا ع ب ط کے حرکت کرتا ہے

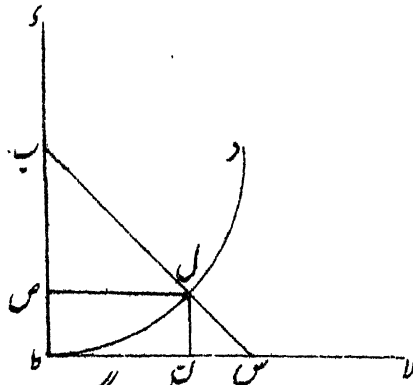
اب شکل سے یہہ ظاہر ہے کہ اگر کلی بلحاظ لا کے اول لیں تو حدود غائی لا = ۰ اور لا = $\sqrt{ط^2 - ی^2}$ ہونگیں اور اس سبب سے حدود غائی ی کی ی = ۰ اور ی = ط ہونگیں پس ہئیت بدلی ہوئی کلی

$\int_0^{ط}\int_0^{\sqrt{ط^2-لا^2}}$ مج (لا دی) ی ی لا ہے

(۲۳۱) $\int\int_0^{ط \text{جتم} ب}$ مج (لق و بر) لق ی بر ی لق میں ترتیب کلی کو بدلو

فرض کرو کہ ط ا = ۲ ط اور نصف دائرہ ط ا کو قطر بنا کر کہینچو اور ع ط لا = بر کے فرض کرو تو ط ع = ۲ ط جتم بر پس کلی تناہ کو مج (لق و بر) لق ∆ بر ∆ لق کی قیمتوں کے مجموعہ کی حد غائی خیال کر سکتی ہیں اور یہہ قیمتیں تمام رقبہ نصف دائرہ پر لیجاتی ہیں پس اسی معلوم ہوا کہ جب ترتیب بدلیں تو بر کی کلی سے جتم$^{-1}$ $\frac{لق}{۲ط}$ تک اور لق کے ۰ سے ۲ ط تک لیں

پس کلی ہئیت بدلی ہوئی

$\int_0^{۲ط}\int_0^{\text{جتم}^{-1}\frac{لق}{۲ط}}$ مج (لق و بر) لق ی لق ی بر

(۲۳۲) $\int_0^{۲ط}\int_{\frac{لا^2}{۴ط}}^{۳ط - لا}$ مج (لا و ی) ی لا ی ی میں کلی کی ترتیب کو بدلو

ی کے واسطے کلی ی = لا۲/۴ط سے ی = ۳ط - لا تک لی گئی ہے مساوات ی = لا۲/۴ط قریب البیضوی
طل د سے علاقہ رکہتی ہے اور ی = ۳ط - لا خط مستقیم ب ل س کی ہے اور یہہ خط
عرض مستقیم قریب البیضوی کی طرف ل پر گذرتا ہے

پس کلی تمام رقبہ ط ل ب ص ط پر پہلیتی ہی اب کلی کی ترتیب کو بدلو اور سطوح بسیط
ط ل ص اور ب ل ص پر جدا جدا خیال کرو بسیط ط ل ص کے واسطے کلی
لا = ۰ سے لا = ۲ √(ط ی) تک لیتی چاہئی اور پہر ی = ۰ سے ی = ط تک اور
بسیط ب ل ص کی واسطے لا = ۰ سے لا = ۳ط - ی تک اور پہر ی = ط سے ی = ۳ط تک
پس کلی ہئیت بدلی ہوئی

∫۰^ط ∫۰^(۲√(ط ی)) مج (لا و ی) زی زلا + ∫ط^۳ط ∫۰^(۳ط - ی) مج (لا ی) زی زلا ہے

(۲۳۳) ∫۰^۱ ∫لا۲^(لا(۲-لا)) مج (لا و ی) زلا زی میں کلی کی ترتیب کو بدلو

یہاں کلی بلحاظ ی کے ی = لا سے ی = لا (۲ - لا) تک کی گئی ہے مساوات ی = لا خط مستقیم
اور ی = لا (۲ - لا) قریب البیضوی کو تعبیر کرتی ہے طالب علم اگر شکل پر امتحان کریگا تو کلی
ہئیت بدلی ہوئی یہہ ہوگی کہ

∫۰^۱ ∫(۱ - √(۱ - ی))^ی مج (لا ی) زی زلا

(۲۳۴) ∫۰^ط ∫(√(ط۲ - لا۲))^(لا + ۲ط) مج (لا و ی) زلا زی کی ترتیب کو بدلو

یہاں کلی بلحاظ ی کے ی = $\sqrt{ط^2 - لا^2}$ سے ی = لا + ۲ ط تک لی گئی ہے اور مساوات

ی = $\sqrt{ط^2 - لا^2}$ دائرہ کو اور ی = لا + ۲ ط خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے

شکل پر طالب علم کو امتحان کرنے سے معلوم ہوگا کہ جب کلی بلحاظ لا کے اول لیجائیگی

کلی کو تین حصوں میں تقسیم کرنا چاہیے اور کلی ہیئت بدلی ہوئی یہہ ہوگی کہ

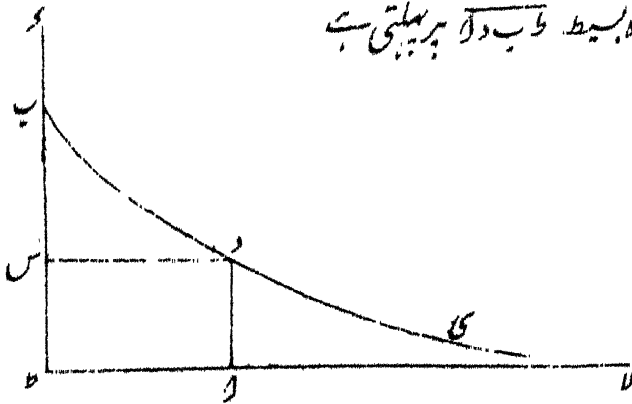
$\int_{-ط}^{ط} \int_{\sqrt{ط^2 - ی^2}}^{ط} مج (لا و ی) زی زلا + \int_{-ط}^{ط} \int_{ط}^{ط^2} مج (لا و ی) زی زلا$

$+ \int_{ط}^{۳ط} \int_{ی - ۲ط}^{ط} مج (لا و ی) زی زلا$

(۲۳۵) $\int_{ط}^{\frac{ص}{ط + ص}} مج (لا و ی) زلا زی$ میں کلی کی ترتیب بدلو

یہاں کلی بلحاظ ی کے ی = ۰ سے ی = $\frac{ص}{ط + ص}$ تک لی گئی ہے مساوات ی = $\frac{ص}{ص + لا}$ لعبید العضوی کو

تعبیر کرتی ہے فرض کرو کہ ب د ی لعبید العضوی ہے اور ط ا = ط تو کلی کو یوں خیال کرسکتے ہیں

کہ وہ بسیط ط ب د ا پر پھیلتی ہے

فرض کرو کہ کلی کی ترتیب بدلی گئی تو ہم کو بسیط ط ا د س اور س د ب پر جدا جدا خیال کرنا چاہیے

بسیط ط ا د س کے واسطے کلی لا = ۰ سے لا = ط تک اور پھر ی = ۰ سے

ی = $\frac{ص}{ص + ط}$ تک لینی چاہیے اور واسطے بسیط س د ب کی کلی لا = ۰ سے

لا = $\frac{ص (۱ - ی)}{ی}$ تک اور پھر ی = $\frac{ص}{ص + ط}$ سے ی = ۱ تک لینی چاہیے پس

کلی ہیئت بدلی ہوئی

$\int_{۰}^{\frac{ص}{ص + ط}} \int_{۰}^{ط} مج (لا و ی) زی زلا + \int_{\frac{ص}{ص + ط}}^{۱} \int_{۰}^{\frac{ص(۱-ی)}{ی}} مج (لا و ی) زی زلا$ ہے

(۲۳۶) ھ∫مع س – ∫کر لا مع مج (لاوی) زلا زی مین کلی کی ترتیب کو بدلو

یہان ھ = $\frac{س}{کر+لب}$ کلی ہُستبدلی ہوئی

∫مع ∫مع مج (لاوی) زی زا + ∫مع ∫مع مج (لاوی) زی زلا ہے

(۲۳۷) ∫مع ∫مع ∫مع مج (لاوی وے) زلا زی زے مین کلی کی ترتیب بدلو

یہان کلی تمام مخروط کے اندر پھیلتی ہے اور مخروط اون سطح مستوی سے احاطہ ہوتا ہے کہ جنکے مساواتین

ے = ۰ اور ے = ی اور ی = لا اور لا = ط ہین

کلی کو مختلف طرح سے ہم لے سکتے ہین اور اسطرح ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

∫مع ∫مع ∫مع مج (لاوی وے) زی زلا زے

یا ∫مع ∫مع ∫مع مج (لاوی وے) زی زے زلا

یا ∫مع ∫مع ∫مع مج (لاوی وے) زے زی زلا

یا ∫مع ∫مع ∫مع مج (لاوی وے) زلا زے زی

یا ∫مع ∫مع ∫مع مج (لاوی وے) زے زلا زی

یہہ تبدلات ہُتون کے مج (لاوی وے) کے جگہ سادہ جملہ رکھہ کر ثابت ہوسکتی ہین اور حقیقت مین کلیان حاصل ہوتے ہین مثلاً اگر مج (لاوی وے) کی جگہ واحد کو رکھین تو $\frac{ط^۳}{۶}$ چھہون صورتون مین سے ایک کی قیمت ہوگی

(۲۳۸) اس مطلب کے سمجھنے کے واسطے یہہ مثالین کافی ہونگین اور یہہ ناممکن ہے کہ قاعدے آسان ہُستبدلی ہوئی کلیات کے حدود غائی کے واسطے بیان کئے جائین یہہ بھی قطعی ضروری نہین کہ شکلین بھی ایسی بنائی جائین جیسے ہم نے بنائی ہین

وجہ اسکی یہہ ہے کہ کوئی علم شکلون سے ایسا نہین حاصل ہوتا کہ وہ اس بات پر غور کرنے نہ حاصل ہوتا ہو کہ مختلف قیمتین جو مقدار متغیر کی اصلی ہوتی جاہئی کہ کلی اوس بسیط پر پہلے جو حدود غائی معلوم سے مفہوم ہو مگر شکلون کے کھینچنے سے یہہ فائدہ ضرور ہے

کہ نتیجہ جلدی سے صحیح نکل آتا ہے

اب ہم اوس مسئلہ کا ذکر کرتے ہین کہ مطلب اقصی اس باب کا ہے یعنی اضعاف کلی مین مقادیر متغیر کا تبدل اول صورت ہم کلی مثناۃ کی لکھتے ہین

(۲۳۹) سوال جسکا حل کرنا پیش نظر ہے وہ یہہ ہے کہ کلی مثناۃ مع مع سہ زلا زد کی ہی اور اوسمین سہ جملہ لا اور د کا ہے اوسکو دوسری کلی مثناۃ کی سورت مین بدل دو جسمین لو اور مو مقادیر متغیر ہون اور پہلے مقادیر متغیران نئی مقادیر متغیر کے ساتھہ ان مساواتون مین لوینے جاوین

مج (لا و د و لو و مو) = ۰ اور مج (لا و د و لو و مو) = ۰

ہم فرض کرتے ہین کہ اصلی کلی د اور لا کی حدود غائی معلوم کے درمیان لی گئی ہے جب کلی بلحاظ د کے اول لیتے ہین تو د کی حدود غائی جملے لا کے ہو سکتی ہین البتہ جب کلی بلحاظ د کے لیتے ہین تو لا کو مقدار مستقل مقرر کرتے ہین

اول ہم کلی کو بلحاظ د کے اوس کلی مین بدلتی ہین جو بلحاظ مو کے لی جاوے اور یہہ بات بنظر ظاہر بہت آسان معلوم ہوتی ہے (۱) کی مساواتون مین لو کو ساقط کرکے د کو جملہ لا اور مو کا اور یہہ کہو کہ

د = صح (لا و مو) . . . . (۲)

اسے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

زد = صحَ (لا و مو) ز مو

اسمین صحَ (لا و مو) سے مراد مسرجزوی صح (لا و مو) کا بلحاظ مو کے ہے

اب مع سہ زد مین د اور زد کی قیمتین مندرج کرو تو ہم کو مع سہ صحَ (لا و مو) ز مو حاصل ہوگا اور اس مین سہ وہ ہے جو سہ مین د کے قیمت کے رکھنے سے حاصل ہوگا اسے معلوم ہوا کہ کلی مثناۃ یہہ ہوجائیگی کہ

مع مع سہ، صحَ (لا و مو) ز لا ز مو

پس ہم نے ی کو خارج کردیا اور اوسکے جگہ مو کو قائم کردیا اور چونکہ ی کی قیمتین حد بنانی والی جنکے درمیان ہم کو در اصل کلی لینی ہے معلوم ہین تو ہم (۲) سے مو کی قیمتین حد بنانی والی جنکے درمیان ہم کو کلی لینی چاہی معلوم ہوسکتی ہین اس بات کا خیال رہے کہ (۲) سے زمو کے دریافت کرنے مین لا کو مقدار مستقل خیال کیا ہے اور یہہ ہم اسواسطے کرتے ہین کہ ابہی ہم لکہہ ائے ہین کہ جب ہم صورت بیانیہ مفروض کی کلی بلحاظ ی کے لیتی ہین تو ہم لا کو مقدار مستقل خیال کرتے ہین اب دوسرا مقدمہ یہہ ہے کہ ترتیب دیگر کی کلی لینی کی بلحاظ لا اور مو کے تبدیل کرین یعنی کلی بلحاظ لا کے اول لین یہہ مضمون وہی ہے جسکا امتحان ابہی ہوچکا ہی کہ فقط اتنی بات کرنی چاہئے کہ جدید حدود دغائی کا فیصلہ کرنا لازم ہے پس جب یہہ فرض کرلین کہ یہہ بات بہی فیصل ہوگئی تو اصل صورت بیانیہ بدل کر یہہ ہوجائیگی کہ

مع مع سم صح (لا و مو) زمو زلا

اب باقی یہہ رہا کہ اس صورت بیانیہ سے لا کو خارج کرین اور اوسکے جگہ لو کو قائم کرین تو اسکے لئے بعینہ عمل موافق سابق کے کرین (۱) کے ساواتون سے ی کو ساقط کرین اور لا کو جملہ مو اور لو کا بنائین اور یہہ کہین کہ

لا = صر (مو و لو) . . . . (۳)

تو اسسے یہہ حاصل ہوگا کہ

زلا = صرَ (مو و لو) زلو

اسمین صرَ (مو و لو) سے سرچزوی (مو و لو) کا بلحاظ لو کے مراد ہے

پس لا اور زلا کی جگہہ اونکی قیمتین مندرج کرو تو کلی ثناہ یہہ ہوجائینگی کہ

مع مع سہ صحَ (لا و مو) صرَ (مو و لو) زمو زلو

اسمین سہ وہ ہے جو سم مین لا کی جگہہ اوسکی قیمت کے مندرج کرنے سے حاصل ہوتا ہے پس اب کلی ثناۃ مین فقط لو اور مو ہین کیونکہ لا جو صحَ (لا و مو) مین نظر اتا ہی اوسکی جگہہ ہم

صورقانونیہ (۴) اور (۶) اور (۸) کی اکثر معلوم ہوتی ہین اونمین ایک بیان حل
سوال کا اون صورتون مین موجود ہے جنمین حدود غائی کلی جدید کی ظاہر معلوم ہوتی
ہین لیکن بعض مثالون مین طرف جدید کی حدود غائی کی تشخیص کرنے مین بعض وقات
بڑی شکل ان پڑتی ہی اسلئے بجای ان صورقانونیہ کے عمل اوسطرح بعینہ کرو جسطرح کہ
نظریات مین بیان ہوا کہ ایک پہلے مقدار متغیر کو ایک دفعہ مین ساقط کرو تاکہ صحیح نتیجہ حاصل ہو
اور اوسپر بہروسا اور اعتماد بہی ہو

(۲۴۰) یہہ ایک مثال ہے کہ

طبع صاطبع مہ زلا زی کی ہئت بدلنی مطلوب ہے اور یہہ معلوم ہے کہ

$$\text{ی} + \text{لا} = \text{لو} \quad \text{اور} \quad \text{ی} = \text{لو مو}$$

معلوم مساواتون سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ لا = لو (۱ - مو) اور ی = لو مو

پس $\frac{\text{زلا}}{\text{زلو}} = \text{۱ - مو}$ اور $\frac{\text{زلا}}{\text{زمو}} = \text{- لو}$ اور $\frac{\text{زی}}{\text{زلو}} = \text{مو}$ اور $\frac{\text{زی}}{\text{زمو}} = \text{لو}$

اسواسطے $\frac{\text{زلا}}{\text{زلو}} \; \frac{\text{زی}}{\text{زمو}} - \frac{\text{زلا}}{\text{زمو}} \; \frac{\text{زی}}{\text{زلو}} = \text{لو (۱ - مو) + لو مو = لو}$

اسسے معلوم ہوا کہ دفعہ ۲۲۹ کی مساوات (۶) مین ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

طبع صاطبع مہ زلا زی = طبع طبع مہ لو زمو زلو

ہم نے کلیات کی جو لمجاظ لو اور مو کے لیں ہین اومین حدود غائی نہین تشخیص کین اسلئے
جو نتیجہ نکالا ہے وہ کسی کام کا نہین ہے اسلئی ہم اس مثال کو اون مراتب کے موافق حل کرتے ہین
جو نظریات مین بیان کین ہین

معلوم مساواتون سے جنمین پہلے اور نئی مقادیر متغیر مربوط ہین لو کو ساقط کرو تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ی} = \frac{\text{مولا}}{\text{۱ - مو}} \quad \text{اسواسطے} \quad \frac{\text{زی}}{\text{زمو}} = \frac{\text{لا}}{(\text{۱ - مو})^{۲}}$$

حدود غائی ی = ۰ اور ی = ص کے مطابق مو = ۰ اور مو = $\frac{\text{ص}}{\text{ص + لا}}$ ہین پس

$$\text{طبع صاطبع مہ زلا زی} = \text{طبع} \; {}^{\frac{\text{ص}}{\text{ص+لا}}}\text{طبع مہ لا} \; (\text{۱ - مو})^{-۲} \; \text{زلا زمو}$$

اب ہم کو ترتیب کلی کی

$$\int_{\circ}^{ط} \int_{\circ}^{\frac{ص}{ص+لا}} مہ_۱ لا (۱-مو)^{-۲}$$ مین بدلنی ہے

یہہ سوال دفعہ ۲۳۵ مین حل ہو چکا اسسے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\int_{\circ}^{ط} \int_{\circ}^{ص} مہ\ زلا زی = \int_{\circ}^{ط} \int_{\circ}^{\frac{ص}{ص+لا}} مہ_۱ لا (۱-مو)^{-۲} زلا زمو$$

$$= \int_{\circ}^{\frac{ص}{ص+ط}} \int_{\circ}^{ط} مہ_۱ لا (۱-مو)^{-۲} زمو زلا + \int_{\frac{ص}{ص+ط}}^{۱} \int_{\circ}^{\frac{ص(۱-مو)}{مو}} مہ_۱ لا (۱-مو)^{-۲} زمو زلو$$

اب ہم کو لا کو لو سے بدلنا باقی رہا یہان

$$لا = لو (۱-مو) \quad \frac{زلا}{زلو} = ۱-مو$$

پس ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ $\int_{\circ}^{\frac{ص}{ط+ص}} \int_{\circ}^{\frac{ط}{۱-مو}} مہ لو زمو زلو + \int_{\frac{ص}{ص+ط}}^{۱} \int_{\circ}^{\frac{ص}{مو}} مہ لو زمو زلو$

چونکہ لا کی حدود غائی ۰ اور ط کے مطابق لو کے حدود غائی ۰ اور $\frac{ط}{۱-مو}$ کے ہین

اور لا کی حدود غائی ۰ اور $\frac{ص(۱-مو)}{مو}$ کے مطابق لو کی حدود غائی ۰ اور $\frac{ص}{مو}$ کے ہین

اگر ط = ص تو کلی ہئت بدلی ہوئی یہہ ہو گی کہ

$$\int_{\circ}^{\frac{۱}{۲}} \int_{\circ}^{\frac{ط}{۱-مو}} مہ لو زمو زلو + \int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} \int_{\circ}^{\frac{ط}{مو}} مہ لو زمو زلو.$$

اگر ط غیر متناہی ہو تو یہہ دونو رقمین اس ایک صورت بیانیہ مین ترکیب پا سکتی ہین کہ

$$\int_{\circ}^{۱} \int_{\circ}^{\infty} مہ لو زمو زلو$$

(۲۴۱) دوسری مثال

$\int_{\circ}^{س} \int_{\circ}^{س-لا} مہ زلا زی$ کی ہئت بدلو اور معلوم ہے کہ

$$ی + لا = لو \text{ اور } ی = لو مو$$

موافق سابق کے کل عمل کرو تو ہم کو یہہ حاصل ہو سکتا ہے

$$ی = \frac{مو لا}{۱-مو} \text{ اور } \frac{زی}{زمو} = \frac{لا}{(۱-مو)^۲}$$

جب کہ ی = ۰ تو یہہ حاصل ہوتا ہے مو = ۰ اور جب کہ لو = س - لا تو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

مو = $\frac{س-لا}{س}$ پس کلی ہئت بدل کر یہہ ہو گی کہ

سے معلوم ہوتا ہے (دفعہ ۱۷۰)

مطلوب یہہ ہے کہ اوسکی ہئت بلحاظ برا ور سر کے تبدیل کرین اور یہہ معلوم ہے کہ ے = لو جم بر اور لا = لو جب بر جم سر اور ی = لو جب بر جب سر سطح کے مساوات معلوم سے ے ارقام لا اور ی مین معلوم ہے اسے معلوم ہوا کہ اندراج قیمت سے ایک مساوات حاصل ہوتی جسے لو ارقام بر اور سر مین معلوم ہوتے ہین اول ہم تبدل ہئت زلا زی کے واسطے دریافت کرتے ہین

$$\frac{\text{زلا}}{\text{زبر}} = \frac{\text{زلو}}{\text{زبر}}\ \text{جب بر جم سر} + \text{لو جم بر جم سر}$$

$$\frac{\text{زلا}}{\text{زسر}} = \frac{\text{زلو}}{\text{زسر}}\ \text{جب بر جم سر} - \text{لو جب بر جب سر}$$

$$\frac{\text{زی}}{\text{زبر}} = \frac{\text{زلو}}{\text{زبر}}\ \text{جب بر جب سر} + \text{لو جم بر جب سر}$$

$$\frac{\text{زی}}{\text{زسر}} = \frac{\text{زلو}}{\text{زسر}}\ \text{جب بر جب سر} + \text{لو جب بر جم سر}$$

اسی معلوم ہوا کہ $\frac{\text{زلا}}{\text{زبر}}\ \frac{\text{زی}}{\text{زسر}} = \frac{\text{زلا}}{\text{زسر}}\ \frac{\text{زی}}{\text{زبر}} = \text{لو جب بر}\left(\text{لو جم بر} + \frac{\text{زلو}}{\text{زبر}}\ \text{جب بر}\right)$

پس زلا زی کی جگہ یہہ رکھینگے کہ

$$\text{لو جب بر}\left(\text{لو جم بر} + \frac{\text{زلو}}{\text{زبر}}\ \text{جب بر}\right)\ \text{زسر زبر}$$

اب پہر دوبارہ ہئت بدلتی ہین

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\text{زے}}{\text{زلا}}\right)^2 + \left(\frac{\text{زے}}{\text{زی}}\right)^2}$$

ہم کو یہہ حاصل ہے کہ $\frac{\text{زے}}{\text{زبر}} = \frac{\text{زے}}{\text{زلا}}\ \frac{\text{زلا}}{\text{زبر}} + \frac{\text{زے}}{\text{زی}}\ \frac{\text{زی}}{\text{زبر}}$

$$\frac{\text{زے}}{\text{زسر}} = \frac{\text{زے}}{\text{زلا}}\ \frac{\text{زلا}}{\text{زسر}} + \frac{\text{زے}}{\text{زی}}\ \frac{\text{زی}}{\text{زسر}}$$

اور نیز $\frac{\text{زے}}{\text{زبر}} = \frac{\text{زلو}}{\text{زبر}}\ \text{جم بر} - \text{لو جب بر}$

$$\frac{\text{زے}}{\text{زسر}} = \frac{\text{زلو}}{\text{زسر}}\ \text{جم بر}$$

پس $\frac{\text{زے}}{\text{زلا}}$ ایک کسر ہے جسکا شمار کنندہ

$$\frac{\text{زے}}{\text{زبر}}\ \frac{\text{زی}}{\text{زسر}} - \frac{\text{زے}}{\text{زسر}}\ \frac{\text{زی}}{\text{زبر}}$$ ہے

یعنی (زلق/زبر جم بر − لق جب بر) (زلق/زسر جب بر جب سر + لق جب بر جم سر)

− زلق/زسر جم بر (زلق/زبر جب بر جب سر + لق جم بر جب سر)

یعنے

− لق جب سر زلق/زسر + لق جب بر جم بر جم سر زلق/زبر − لق۲ جب۲ ز جم سر

اور نسب نما

زلا/زبر زی/زسر − زلا/زسر زی/زبر

ہے اور اسکی قیمت پہلے دریافت کی ہی گئیں

زے/زلا = (لق جب بر جم بر جم سر زلق/زسر − لق جب سر زلق/زبر − لق۲ جب۲ بر جم سر) / (لق جب بر (لق جم بر + جب بر زلق/زبر))

اسیطرح

زے/زی = (لق جم سر زلق/زسر + لق جب بر جم بر جب سر زلق/زبر − لق۲ جب۲ بر جب سر) / (لق جب بر (لق جم بر + جب بر زلق/زبر))

اسواسطے

۱ + (زے/زلا)۲ + (زے/زی)۲ = (لق۴ جب۲ بر + لق۲ (زلق/زسر)۲ + لق۲ جب۲ بر (زلق/زبر)۲) / (لق۲ جب۲ بر (لق جم بر + جب بر زلق/زبر)۲)

پس اخر کو ہُت بدلی ہوئی کلی

مع مع \ [لق۲ جب۲ بر + (زلق/زسر)۲ + جب۲ بر (زلق/زبر)۲] لق زسر زبر

(۲۴۵) اب کچھہ دقت کلی مثلثہ کی ہُت بدلنے مین نہین ہوگی فرض کرو کہ مہ ایک جملہ لا اور ی اور ے کا ہے اور مع مع مہ زلا زی زے کی ہُت ایک کلی مثلثہ مین بدلتی ہے جسمین نئی مقادیر متغیر لو اور مو اور می ہون اور یہہ لا اور ی اور ے کے ساتھہ تین مساواتون مین مربوط ہون دفعہ ۲۳۹ کی تحقیقات سے ہم اس بات کو پہلے سے خیال کرسکتے ہین کہ نتیجہ کی اسان صورت اوس حالت مین ہوگی کہ پہلے مقادیر متغیر نئے مقادیر متغیر کی ارقام مین بغیر پیچیدگی کے بیان ہوئی ہون پس فرض کرو

لا = ح۱ (لو و مو و می) اور ی = ح۲ (لو و مو و می) و ے = ح۳ (لو و مو و می) ... (۱)

اول ہم کلی کو جو بلحاظ ے کے لی گئی ہے اوسکو اوس کلی مین بدلتے ہین جو بلحاظ می کے لی گئی ہے ے کے کلی لینے کے اندر ہم لا اور ر کو مقادیر مستقل خیال کرتے ہین نظریات مین (۱) سے لو اور ہو کو ساقط کرکے ے کو جملہ لا اور ء اور می کا بنا سکتے ہین اور پہر ہم کو سر جزوی ے کا بلحاظ می کے لا اور ر کو مقادیر مستقل خیال کرکے لینا چاہئے مگر نتیجہ مطلوب ہم کو (۱) کی مساوات کے حیثیت موجود کے جزی لینے سے حاصل ہوجاتا ہے

$$\frac{\text{زح}_1}{\text{زلو}}\,\frac{\text{زلو}}{\text{زمی}}+\frac{\text{زح}_1}{\text{زہو}}\,\frac{\text{زہو}}{\text{زمی}}+\frac{\text{زح}_1}{\text{زمی}}=0$$

$$\frac{\text{زح}_2}{\text{زلو}}\,\frac{\text{زلو}}{\text{زمی}}+\frac{\text{زح}_2}{\text{زہو}}\,\frac{\text{زہو}}{\text{زمی}}+\frac{\text{زح}_2}{\text{زمی}}=0$$

$$\frac{\text{زح}_3}{\text{زلو}}\,\frac{\text{زلو}}{\text{زمی}}+\frac{\text{زح}_3}{\text{زہو}}\,\frac{\text{زہو}}{\text{زمی}}+\frac{\text{زح}_3}{\text{زمی}}=0\quad\frac{\text{زے}}{\text{زمی}}$$

$\frac{\text{زلو}}{\text{زمی}}$ اور $\frac{\text{زہو}}{\text{زمی}}$ کو ساقط کرو تو یہہ معلوم ہوگا کہ

$$\frac{\text{زے}}{\text{زمی}}=\frac{\text{ن}}{\frac{\text{زح}_1}{\text{زلو}}\,\frac{\text{زح}_2}{\text{زہو}}-\frac{\text{زح}_2}{\text{زلو}}\,\frac{\text{زح}_1}{\text{زہو}}}$$

اسمین

$$\text{ن}=\frac{\text{زح}_3}{\text{زمی}}\left(\frac{\text{زح}_1}{\text{زلو}}\,\frac{\text{زح}_2}{\text{زہو}}-\frac{\text{زح}_2}{\text{زلو}}\,\frac{\text{زح}_1}{\text{زہو}}\right)+\frac{\text{زح}_1}{\text{زمی}}\left(\frac{\text{زح}_2}{\text{زلو}}\,\frac{\text{زح}_3}{\text{زہو}}-\frac{\text{زح}_3}{\text{زلو}}\,\frac{\text{زح}_2}{\text{زہو}}\right)+\frac{\text{زح}_2}{\text{زمی}}\left(\frac{\text{زح}_3}{\text{زلو}}\,\frac{\text{زح}_1}{\text{زہو}}-\frac{\text{زح}_1}{\text{زلو}}\,\frac{\text{زح}_3}{\text{زہو}}\right)$$

اسے معلوم ہوا کہ کلی بدل کر یہہ ہوئی کہ

$$\text{مع مع مع م}_1\,\frac{\text{ن}}{\frac{\text{زح}_1}{\text{زلو}}\,\frac{\text{زح}_2}{\text{زہو}}-\frac{\text{زح}_2}{\text{زلو}}\,\frac{\text{زح}_1}{\text{زہو}}}\ \text{ز لا ز ء ز می}$$

اسمین م۱ وہ ہے جو م مین ے کے قیمت ارقام لا اور ء اور می رکہنے سے ہوجاتا ہے اب ے کے حدود غائی معلوم سے می کی حدود غائی دریافت کرنی چاہی پہر ترتیب کلی ء اور می کے واسطے بدلنی چاہی اور پہر عمل موافق سابق کے ء کے خارج کرنے اور ہو کے داخل کرنے کی لئی کرنا چاہیے اس مسئلہ مین یہہ مناسب ہے کہ عمل کے کرنے مین قدم بقدم چلین تاکہ کلی کی حدود غائی معلوم ہوجائین

ہم نہایت آسانی سے آخر صورت قانونیہ کو اسطرح استخراج کر سکتے ہین کہ کلی بلحاظ ے کے کلی بلحاظ می مین موافق بیان بالا کے ہیئت بدلین اور پہر دو دفعہ ترتیب کلی کو تبدیل کرین

تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ن

مع مع مع مہ ^ن^-۱ زمی زلا زی (زج۱/زلو · زج۲/زمو - زج۲/زلو · زج۱/زمو)

اب کلی متناہ بلحاظ لااوری کی ہیئت کو کلی متناہ بلحاظ لو اور مو مین بوساطت (۱) کے اول دو مساواتون کے تبدیل کرو تو دفعہ ۲۳۹ کے موافق رمز زلا زی کا قائم مقام

(زج۱/زلو · زج۲/زمو - زج۲/زلو · زج۱/زمو) زمو زلو

ہی اور کلی اخر کو ہیئت بدل کر یہہ ہو جائیگی کہ

مع مع مع مہ^ن^ زمی زمو زلو

اسمین مہ وہ ہی جو لا اور ی اور ے کی جگہہ اونکی قیمتین ارقام لو اور مو اور می مندرج کرنے سے ہو جاتا ہے

اب طالب علم کو اوس پیچیدہ صورت مین کہ جسمین مقادیر متغیر جدید اور قدیم اس صورت کی مساواتون مین مربوط ہوں کہ

مج۱ (لا و ی و ے و لو و مو و می) = ۰
مج۲ (لا و ی و ے و لو و مو و می) = ۰ ..... (۲)
مج۳ (لا و ی و ے و لو و مو و می) = ۰

کچھہ دقت نہین واقع ہوگی

یہان یہہ دریافت ہوگا کہ

زے/زمی = ل۱/د۱ ، زی/زمو = ل۲/د۲ ، زلا/زلو = ل۳/د۳

اور نیز ل۲ = د۱ اور ل۳ = د۲

پس مع مع مع مہ زلا زی زے = مع مع مع مہ ل۱/د۳ زلو زمو زمی اسمین

ل۱ = زج۱/زمی (زج۲/زلو · زج۳/زمو - زج۳/زلو · زج۲/زمو) + زج۲/زمی (زج۳/زلو · زج۱/زمو - زج۱/زلو · زج۳/زمو) + زج۳/زمی (زج۱/زلو · زج۲/زمو - زج۲/زلو · زج۱/زمو) [illegible]

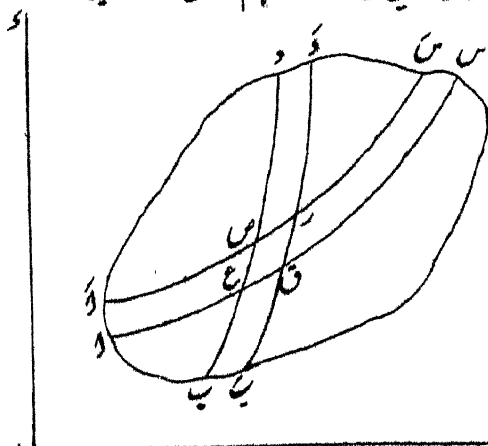
اور د۳ بہی برابر اسی قبیل کی صورت بیانیہ کے ہی جسمین لا اور ی اور ے بجای لو

اور مو اور می کے ہیں

یہہ ممکن ہے کہ (۲) مساواتین ایسی ہون کہ تبدلات ہئست کی طریقہ مین کچھہ قیود لگائین مثلاً یہہ مساواتین ہون کہ

لا + ی + ے - لو = ۰ اور لا + ی - لو مو = ۰ اور ی - لو مو می = ۰

ان مساواتون سے ہم ے کو ارقام می اور لا اور ی مین نہین بیان کر سکتے اسلئے ہم کو اغاز ے اور می کے تبادل سے نہین کرنا چاہیے لیکن ہم ے اور لو کے تبادل سے یا ے اور مو کے تبادل سے اغاز کر سکتے ہین یا اغاز اسطرح کہ لا یا ی کو لو یا مو یا می سے تبدیل کرین

(۲۴۶) طالب علمون کے سمجھانے کے واسطے یہہ امر فائدہ مند ہوگا کہ ہم تبدل ہئست کی توضیح علم ہندسہ کے موافق بیان کرین کل ثناۃ سے ہم شروع کرتے ہین

فرض کرو کہ مع مع مہ زلا زی کلی ثناۃ ہے اور وہ لا اور ی کے کل قیمتون کے موافق جو خط ا ب س ذ مین واقع ہون لی گئی ہے اور فرض کرو کہ مقادیر متغیر لا اور ی نئی مقادیر متغیر لو اور می کے ساتھہ ان مساواتون مین مربوط ہین کہ

لا = ح۱ (لو و مو) اور ی = ح۲ (لو و مو) . . . . (۱)

ان مساواتون سے فرض کرو کہ مو اور لو کے ارقام مین لا اور ی دریافت ہوئی ہین سو اونکو اسطرح لکھہ سکتے ہین کہ

لو = ح۱ (لا و ی) اور مو = ح۲ (لا و ی) . . . (۲)

اب لو کی کوئی مستقل قیمت لگاؤ تو اول مساوات (۲) کی ایک خط منحنی کو تعبیر کرنی لگتی ہی اور متواتر
مستقل قیمتین لو کی لگانے سے ایک سلسلہ ایسے خطوط منحنی کا حاصل ہوگا پس فرض کرو کہ
د ع ق س ایسا خط منحنی ہو جسکا ہر نقطہ پر ح (لا و ی) کی ایک خاص مستقل قیمت لو رکھتا ہے
اور فرض کرو کہ ا ص ر س ایک خط منحنی ہے جسکے ہر نقطہ پر ح (لا و ی) کی خاص مستقل قیمت
لو + فرلو رکھتا ہے علی ہذا القیاس ب ع ص د ایک خط منحنی جسکی ہر نقطہ پر ح (لا و ی)
ایک خاص مستقل قیمت مو رکھتا ہے اور ب ق ر د خط منحنی ہی جسکی ہر نقطہ پر ح (لا و ی)
ایک خاص قیمت مستقل مو + فرمو رکھتا ہے اور اب فرض کرو کہ لا و ی محددین نقطہ ع کے ہین
اب ق اور ص اور ر کے محددین کو بیان کرتے ہین
محددین ق کے ع کی محددین سے اسطرح دریافت ہوتے ہین کہ مو کو مو +
فرمو سے بدلتی ہین پس اسی معلوم ہوا کہ موافق (۱) کے وہ آخر کو جب فرمو غیر محدود
چھوٹا ہوگا یہہ ہونگے کہ

لا + (زلا/زمو) فر لا اور ی + (زی/زمو) فرمو

علی ہذا القیاس ص کے محددین ع کے محددین سے اسطرح دریافت ہوتے ہین کہ لو کو
لو + فرلو سے بدل دو اسے معلوم ہوا کہ موافق (۱) کے وہ اخرکار

لا + (زلا/زلو) فرلو اور ی + (زی/زلو) فرلو

محددین ر کے ع کے محددین سے اسطرح دریافت ہوتے ہین کہ لو کو لو + فرلو سے اور
مو کو لو + فرمو سے تبدیل کرین اسے بموجب (۱) کے اخر کو وہ یہہ ہونگے کہ

لا + (زلا/زلو) فرلو + (زلا/زمو) فرمو اور ی + (زی/زلو) فرلو + (زی/زمو) فرمو

ان نتایج سے ثابت ہوتا ہے کہ ع اور ق اور ر اور ص اخر کو ایک متوازی الاضلاع کے
کونون کے نقطون پر واقع ہوتے ہین اور اس متوازی الاضلاع کا رقبہ تعبیر کسی غلطی کے بجاے
رقبہ منحنی الاضلاع ع ق ر ص کے حد غائی مین لے سکتی ہین اور مثلث ع ق ر

کے صورت بیانیہ اوسکے کونون کی محددین کے اندر دفعۂ اہل علم ہندسہ بالجبری ظاہر ہے
اور رقبہ متوازی الاضلاع کا دوچند مثلث سے ہوتا ہے اسسے معلوم ہوا کہ اخر کار رقبہ ع ق ر ص
کی صورت بیانیہ یہہ ہوگی کہ

$$\pm\left(\frac{\text{زلا}}{\text{زلو}}\,\frac{\text{زی}}{\text{زمو}}-\frac{\text{زلا}}{\text{زمو}}\,\frac{\text{زی}}{\text{زلو}}\right)\text{فرلو فرمو}$$

پس اسسے ظاہر ہے کہ مع مع مہ زلا زی کی جگہ

$$\pm\,\text{مع مع مہ}\left(\frac{\text{زلا}}{\text{زلو}}\,\frac{\text{زی}}{\text{زمو}}-\frac{\text{زلا}}{\text{زمو}}\,\frac{\text{زی}}{\text{زلو}}\right)\text{زلو زمو}$$

رکھہ سکتے ہین اشتباہ علامت کا اوسوقت رفع ہوجائیگا جسوقت کلی حدود دفائی دریافت ہوجائیگی
ہئت بدلی ہوئی کلی ہین ہم یہہ فرض کر سکتے ہین کہ کلی بلحاظ مو اول لی گئی ہین اور لو مقدار مستقل
سمجھی گئی ہے اور اسکی یہہ معنی ہین کہ اجزاء ترکیبی شکل ع ق ر ص کے جیسے ایک قطعہ مثل ا ا' س س'
کے بنتا ہے لی گئی ہین پس کلی بلحاظ لو کے یہہ معنی ہین کہ تمام ایسے قطعے جیسا کہ ا ا' س س' ہے
اور جو احاطہ ا ب س د مین واقع ہین لی گئے ہین

(۲۴۷) اب کلی مثلثہ کی ہئت بدلنی کی توضیح علم ہندسہ مین کرتے ہین

فرض کرو کہ مع مع مع مہ زلا زی زے کلی مثلثہ سے اور لا اور ی اور ے کے تمام

قیمتون کے موافق جو حدود غائی معینہ مین واقع ہو لی گئی ہی اور فرض کرو کہ مقادیر متغیر
لا و ی و ے ان نئی مقادیر متغیر لو و مو و می کے ساتھہ ان مساواتون مین مربوط ہین
لا = ح (لو و مو و می) اور ی = ح۲ (لو و مو و می) اور ے = ح۳ (لو و مو و می)...(۱)
ان مساواتون سی فرض کرو کہ لو اور مو اور می کو ارقام لا اور ی اور ے مین بیان کرین تو (۲)
لو = ح۱ (لا و ی و ے) اور مو = ح۲ (لا و ی و ے) اور می = ح۳ (لا و ی و ے)
اب لو کی کوئی مستقل قیمت لگانے سے اول مساوات (۲) کی ایک سطح بیرونی کو تعبیر کرنی لگی ہے
اور متواتر مختلف مستقل قیمتین لو کی لگانے سے ہم کو ایک سلسلہ سطوح بیرونی کا حاصل ہوتا ہے
فرض کرو کہ ایک سطح بیرونی ہو جسکا ہر نقطہ ح۱ (لا و ی و ے) قیمت مستقل لو رکہتا ہے
اور یہہ بہی فرض کرو کہ ع اور ب اور د اور س چار نقطی اوس سطح بیرونی مین ہین
اور ایک سطح بیرونی ایسی بہی ہے کہ جسکا ہر نقطہ پر ح۱ (لا و ی و ے) ایک مستقل قیمت
لو + فرلو رکہتا ہے اور اس سطح بیرونی مین چار نقطی آ و قَ و حَ و یَ ہین اور ایک سطح
فرض کرو کہ ع و آ و ی و سَ اوس سطح بیرونی مین ہین جسکے ہر نقطہ پر ح۲ (لا و ی و ے)
مستقل قیمت مو رکہتا ہے اور بَ و دَ و حَ و قَ اوس سطح بیرونی پر ہین جسکے
ہر نقطہ پر ح۲ (لا و ی و ے) ایک مستقل قیمت مو + فرمو رکہتا ہے
فرض کرو کہ ع اور آ اور قَ اور بَ اوس سطح بیرونی مین ہین جسکے ہر نقطہ پر
ح۳ (لا و ی و ے) مستقل قیمت می رکہتا ہے اور سَ و دَ و حَ و یَ اوس سطح بیرونی مین
ہین جسکے ہر نقطہ پر ح۳ (لا و ی و ے) ایک مستقل قیمت می + فرمی رکہتا ہے
فرض کرو کہ لا و ی و ے محددین نقطہ ع کے ہین اب ہم محددین اور نقاط کے بیان کرتے ہین
محددین نقطہ ا کے ع کے محددین سے اسطرح دریافت ہوتی ہین کہ لو کو لو + فرلو سے
بدل دین اسی معلوم ہوا کہ موافق (۱) کے وہ اجزا کا رجیب فرلو غیر محدود چہوٹا ہو
لا + $\frac{\text{ز}لا}{\text{ز}لو}$ فرلو اور ی + $\frac{\text{ز}ی}{\text{ز}لو}$ فرلو اور ے + $\frac{\text{ز}ے}{\text{ز}لو}$ فرلو ہین

اور محددین ب کے ع کے محددین سے اسطرح دریافت ہوتے ہین کہ مو کو مو + فر مو سے

بدلین اسے معلوم ہوا کہ موافق (۱) کے وہ اخر کار

لا + $\frac{ز لا}{ز مو}$ فر مو اور ی + $\frac{ز ی}{ز مو}$ فر مو اور ے + $\frac{ز ے}{ز مو}$ فر مو ہین

اور اسیطرح محددین ج کے اخر کار

لا + $\frac{ز لا}{ز می}$ فر می اور ی + $\frac{ز ی}{ز می}$ فر می اور ے + $\frac{ز ے}{ز می}$ فر می ہونگے

اور محددین د کے ع کے محددین سے اسطرح دریافت ہوتے ہین مو کو مو + فر مو سے

اور می کو می + فر می سے بدل دین تو موافق (۱) کے اخر کو وہ یہہ ہونگے کہ

لا + $\frac{ز لا}{ز مو}$ فر مو + $\frac{ز لا}{ز می}$ فر می اور ی + $\frac{ز ی}{ز مو}$ فر مو + $\frac{ز ی}{ز می}$ فر می اور ے + $\frac{ز ے}{ز مو}$ فر مو + $\frac{ز ے}{ز می}$ فر می

اسیطرح سے محددین ی اور ف اور ح کے دریافت ہوتے ہین

ان قیمتون سے ثابت ہوتا ہے کہ ع و آ د ب د س د د د ی د ق و ح اخر کار ایک

مجسم متوازی السطوح کے کونون پر واقع ہونگے اور اس مجسم متوازی السطوح کا حجم

بغیر کسی غلطی کے حجم اوس مجسم کا ہو سکتا ہے جو چہہ سطوح بیرونی مذکور سے احاطہ کیا جاے

اب یہہ مسئلہ مشہور ہے جو مجسم چار مثلث متساوی الاضلاع سے احاطہ ہوتا ہے اوسکے حجم

کو اوسکے کونون کے محددین کے ارقام مین بیان کر سکتے ہین اور مجسم متوازی السطوح

ع ح اسے مجسم مخروطی ا ب ع س سے چہہ گنا ہے اسے معلوم ہوا کہ اخر کار

حجم مجسم متواز السطوح کا یہہ ہوگا کہ

$$\pm \left[\frac{ز لا}{ز لو} \left(\frac{ز ی}{ز مو} \frac{ز ے}{ز می} - \frac{ز ی}{ز می} \frac{ز ے}{ز مو} \right) + \frac{ز ی}{ز لو} \left(\frac{ز ے}{ز مو} \frac{ز لا}{ز می} - \frac{ز ے}{ز می} \frac{ز لا}{ز مو} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{ز ے}{ز لو} \left(\frac{ز لا}{ز مو} \frac{ز ی}{ز می} - \frac{ز لا}{ز می} \frac{ز ی}{ز مو} \right) \right] \text{فر لو فر مو فر می} = \pm \text{ن فر لو فر مو فر می}$$

اسے معلوم ہوا کہ کلی مثلثہ کی ہئیت بدلی ہوئی

$$\pm \text{مع مع مع مَہ ن ز لو ز مو ز می}$$

ہی اشتباہ علامت کا اوسوقت رفع ہوجایگا کہ حدود غائی کلی معلوم ہوجائین

(۲۴۸) کلی متناہ اور مثلثہ کا ہیئت بدلنے کا مسئلہ لکھا گیا اس تحقیقات مین اصل منشا ہمارا یہہ ہے تہا کہ ہم تبلادین کہ پہلی مقادیر متغیر کس طرح خارج ہو جاتے ہین اور اونکے جگہ نئی مقادیر متغیر کیونکر داخل ہوجاتی ہین طالب علمون کو ہدایت کرتے ہین کہ وہ خاص اس باب پر متوجہ ہون کیونکہ اوسکے سبب سے مسئلہ صاف اور عیان ہوجاتا ہے اور حدود دغائی ہیئت بدلی ہوئی کلی کی بابانی تحقیق ہوسکتی ہین توضیحات ہندسیہ کا بوجہ طالب علم کے سر پر نہین رکہتی کہ خواہ مخواہ وہ اوسپر توجہ کرے اسلئے کہ اونکی تشریح کے واسطے کچہ لکہنا چاہیے جب وہ قایل اسکے ہوتی ہین کہ اونکے اثبات کو مستحکم سمجہین

(۲۴۹) اب اس مضمون کو ختم کرنے سے پیشتر ہم وہ ترکیب لکہتے ہین جو پہلے پہلے مسئلے کے حل کرنے مین کام اتی تہی ہم نے جواس ترکیب کو وقعت کے ساتہہ نہین بیان تو کچہ سبب تو یہہ تہا کہ اوسے حدود دغائی جدید کی تشخیص کرنے مین کچہ اعانت نہین ہوتی اور کچہہ یہہ سبب تہا کہ وہ صاف نہین تنگ اور تاریک ہے اس تنگ تاریک ہونے کی شکایت اور مصنفین پہلے سے ہی کر چکے ہین

فرض کرو کہ مع مع مہ زلا زی کی ہیئت بدلتی ایسی کلی ہین ہے جو بلحاظ دو نئی مقادیر متغیر لو اور مو کے لیجاے اور یہہ دو نو نئی مقادیر متغیر پہلے مقادیر متغیر کے معلوم جملے ہین

فرض کرو کہ مقادیر متغیر مین ایسی تبدلات کی گئی ہین جنمین غیر متناہی چہوٹے اجزا لی گئی ہین تو

$$زلا = \frac{زلا}{زلو} زلو + \frac{زلا}{زمو} زمو \quad \ldots (۱)$$

$$زی = \frac{زی}{زلو} زلو + \frac{زی}{زمو} زمو \quad \ldots (۲)$$

اب اصل صورت بیانیہ مہ زلا زی مین زلا کے بنانے مین ی کو مقدار مستقل فرض کرتے ہین اسلیے

زی = ۰ اسے (۲) کے یہہ صورت ہوجائیگی کہ

$$۰ = \frac{زی}{زلو} زلو + \frac{زی}{زمو} زمو \quad \ldots (۳)$$

اسے زمو کو دریافت کرو اور اوسکی قیمت کو (۱) مین درج کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$زلا = \frac{\frac{زلا}{زلو}\frac{زی}{زمو} - \frac{زلا}{زمو}\frac{زی}{زلو}}{\frac{زی}{زمو}} زلو \quad \ldots (۴)$$

اب پہر مہ زلازی مین زی کے بنانے کے واسطے لا کو مستقل فرض کرتے ہین یعنی زلا = ۰
اسے معلوم ہوا کہ موافق (۴) کے ہم کو زلو = ۰ کے فرض کرنا چاہیے پس (۲) سے

$$\text{زی} = \frac{\text{زی}}{\text{زمو}}\ \text{زمو} \qquad (5)$$

(۴) اور (۵) سے

$$\text{زلازی} = \left(\frac{\text{زلا}}{\text{زلو}}\frac{\text{زی}}{\text{زمو}} - \frac{\text{زلا}}{\text{زمو}}\frac{\text{زی}}{\text{زلو}}\right)\ \text{زلو زمو}$$

اور مع مع مہ زلازی کی یہہ صورت ہو جائیگی کہ

$$\text{مع مع مہ}\ \left(\frac{\text{زلا}}{\text{زلو}}\frac{\text{زی}}{\text{زمو}} - \frac{\text{زلا}}{\text{زمو}}\frac{\text{زی}}{\text{زمو}}\right)\ \text{زلو زمو}$$

بلحاظ جدید حدود غائی کے ہم یہہ ایک عام ہدایت کر سکتے ہین کہ وہ ایسی ہونی چاہئی کہ جسمین ہر ایک جز ترکیبی داخل ہو جو پہلی حدود غائی کے درمیان داخل تہا

(۲۵۰) علی ہذا القیاس کلی مثلثہ

$$\text{مع مع مع مہ زلازی زے}$$

کی کیفیت ہی اوسمین عمل بہ تفصیل ذیل ہوتا ہے کہ فرض کرو نئے مقادیر متغیر لو اور مو اور می ہوں
زے کے بنانے مین فرض لا اور ی کی مقادیر مستقل خیال کرتے ہین پس

$$\text{زے} = \frac{\text{زے}}{\text{زلو}}\ \text{زلو} + \frac{\text{زے}}{\text{زمو}}\ \text{زمو} + \frac{\text{زے}}{\text{زمی}}\ \text{زمی}$$

$$0 = \frac{\text{زلا}}{\text{زلو}}\ \text{زلو} + \frac{\text{زلا}}{\text{زمو}}\ \text{زمو} + \frac{\text{زلا}}{\text{زمی}}\ \text{زمی}$$

$$0 = \frac{\text{زی}}{\text{زلو}}\ \text{زلو} + \frac{\text{زی}}{\text{زمو}}\ \text{زمو} + \frac{\text{زی}}{\text{زمی}}\ \text{زمی}$$

$$\text{پس زے} = \frac{\text{ن زمی}}{\frac{\text{زلا}}{\text{زلو}}\frac{\text{زی}}{\text{زمو}} - \frac{\text{زلا}}{\text{زمو}}\frac{\text{زی}}{\text{زلو}}} \quad \cdots (1)$$

اسمین ن کی وہی قیمت ہے جو دفعہ ۲۴۷ مین تہی
اب زی کے بنانے مین لا اور ے کو مقادیر مستقل خیال کرتے ہین تو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{زی} = \frac{\text{زی}}{\text{زلو}}\ \text{زلو} + \frac{\text{زی}}{\text{زمو}}\ \text{زمو}$$

$$0 = \frac{\text{زلا}}{\text{زلو}}\ \text{زلو} + \frac{\text{زلا}}{\text{زمو}}\ \text{زمو}$$

اسواسطے ز ی = $\frac{\text{زمی}}{\text{زلا}}\ \frac{\text{زلا}}{\text{زلو}} - \frac{\text{زی}}{\text{زلو}}\ \frac{\text{زلا}}{\text{زمو}}$ زمو . . . . (۲)

اب اخر زلا کے بنانے مین ی اور ے کو مقادیر مستقل فرض کرتے ہین اور بموجب (۱) او (۲) کے می اور مو کو مقادیر مستقل فرض کرتے ہین پس یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

زلا = $\frac{\text{زلا}}{\text{زلو}}$ زلو (۳)

(۱) اور (۲) اور (۳) سے

زلا زی زے = ن زلو زمو زمی

(۲۵۱) اگر کسی طالب علم کو تاریخ اس مضمون کی دریافت کرنی ہو تو اوسکو وہ بہت سے انگریزی کتابون مین دیکھہ سکتا ہے

امثلہ

(۱) ثابت کرو کہ اگر لا = ط جیب بر جیب سر اور ی = ص جم بر جیب سر تو کلی متناقہ مع مع زلا زی کی ہیئت بدل کر

= مع مع ط ص جیب سر جم سر زسر زبر ہوگی

(۲) اگر لا = لو جیب سہ + مو جم سہ اور ی = لو جم سہ - مو جیب سہ تو ثابت کرو کہ

مع مع ح (لا و ط) $\frac{\text{زلا زی}}{\sqrt{(1 - \text{لا}^2 - \text{ی}^2)}}$ = مع مع ح (لو و مو) $\frac{\text{زلو زمو}}{\sqrt{(1 - \text{لو}^2 - \text{مو}^2)}}$

(۳) ثابت کرو کہ

صحیح صحیح مع مع ح (ط^2 لا^2 + ص^2 ی^2) زلا زی = $\frac{\text{کہ}}{\text{۴ ط ص}}$ صحیح مع مع ح (لا) زلا

(۴) مع مع سہ زلا زی کی ہیئت تبدیل کرو اسمین ی = لالو اور لا = $\frac{\text{مو}}{1+\text{لو}}$ حدود غائی ی کی ۰ اور لا اور حدود غائی لا کی ۰ اور ط ہین اور ہیئت بدلی ہوئی کلی مین حدود غائی دریافت کرو

حاصل ابع ط(۱+لو) مع مہ مو (۱ + لو)$^{-2}$ زلو زمو

(۵) مع مع ی$^{-(\text{لا}^2 + 2\text{لا ی جم سہ} + \text{ی}^2)}$ زلا زی کی ہیئت قائم الزاویہ محددین سے

(۱۱) اگر سہ لا = ی سے اور صہ ی = سے لا اور لر سے = لاہ تو ثابت کرو کہ

∴ مع مع مع ح (سر د صہ د ی) زسہ زصہ زلر = ۴ مع مع مع ح (ہے/لا د ے/ی لا د لا/ے) زلا زی زے

(۱۲) مع مع مع مع مہ زلا، زلا۲ زلا۳ زلا۴ کی ہئیت بدلو جسمیں لق دبر دسر اور دھر ہوا اور

لا۱ = لق جیب بر جم سر اور لا۲ = لق جم بر جم ھر

لا۳ = لق جیب بر جیب سر اور لا۴ = لق جم بر جیب ھر

ماحصل مع مع مع مع مہ لق۳ جیب بر جم بر زلق زبر زسر زھر

(۱۳) خطوط منحنی مج (لا دی) = لو اور صج (لا دی) = مو اور خطوط منحنی جو مقادیر مستقلہ لو اور مو کو نہایت ہی چھوٹی زیادتی دینے سے حاصل ہوں ان سب خطوط منحنی کے درمیان جو رقبہ واقع ہو اوسکو دریافت کرو

قریب البیضوی اور اوسکے عرض مستقیم کے اطراف سے جو مماس نکالی جائیں انکے درمیان جو رقبہ واقع ہو اوسکو قریب البیوض کے سلسلہ سے اور خطوط مستقیم کے سلسلہ سے تقسیم کرکے دریافت کرو سلسلہ قریب البیوض ایسا ہو کہ ہر یک قریب البیضوی مماسوں کو مس کرے اور اور سلسلہ خطوط مستقیم مماسوں کے نقطہ تقاطع سے کہینچا جائے

(۱۴) کلی مثلثہ مع مع مع ج (لا د ی د ے) زلا زی زے کی ہئیت ایسی کلی میں تبدیل کرو کہ اوسمیں مقادیر متغیر بے تعلق لی دی دے ہوں اور یہہ معلوم ہو کہ صج (لا د ی د ے د لی) = اور اوپر کی کلی میں لا اور ی اور ے کو لق اور بر اور سر میں تبدیل کرو اور یہہ معلوم ہے کہ صج (لا د ی د ے د لق) = ۰ اور صج (ی د ے د لق د بر) = ۰ اور صج (ے د لق د بر د سر) = ۰

$$\text{ماحصل} - \text{مع مع مع}\ \frac{\dfrac{\text{زصج}}{\text{زلق}}\ \dfrac{\text{زصج}_1}{\text{زبر}}\ \dfrac{\text{زصج}_2}{\text{زسر}}}{\dfrac{\text{دصج}}{\text{دلا}}\ \dfrac{\text{دصج}_1}{\text{دی}}\ \dfrac{\text{دصج}_2}{\text{دے}}}\ \text{ح}_1 (\text{لق د بر د سر})\ \text{زلق زبر زسر}$$

(۱۵) کلی ثنائیہ مع مع زلا زی $\Big/$ $\left[1 + \left(\frac{\text{ز ے}}{\text{زلا}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ز ے}}{\text{زی}}\right)^2\right]$ کے

لا اور ی اور ے اس مساوات میں مربوط ہوتے ہیں کہ لا^۲ + ی^۲ + ے^۲ = ۱
اس کلی کی ہیئت ایک ایسی کلی میں تبدیل کرو کہ جسمیں ارقام بر اور سر ہوں اور جنکا ارتباط ان سے ہو

لا = جب سر √(۱ − م^۲ جب^۲ بر)   ی = جم بر جم سر

ے = جب بر √(۱ − ن^۲ جب^۲ سر)   م^۲ + ن^۲ = ۱

اسے ثابت کرو کہ

∫^{π/2} مع ∫^{π/2} مع (م^۲ جم^۲ بر + ن^۲ جم^۲ سر) / (√(۱ − م^۲ جب^۲ بر) √(۱ − ن^۲ جب^۲ سر)) ز بر ز سر = π/۲

(۱۶) کلی مع مع مع ز لا ز ی ز ے کی ہیئت لق اور بر اور سر میں تبدیل کرو اور جسمیں

لا = لق جب سر √(۱ − ن^۲ جب^۲ بر)   ی = لق جم سر جب بر

ے = لق جم بر √(جم^۲ سر + ن^۲ جب^۲ سر)

حاصل مع مع مع لق^۲ [(ن^۲ − ۱) جم^۲ سر − ن^۲ جب^۲ ر] ز لق ز بر ز سر / (√(۱ − ن^۲ جم^۲ بر) √(جم^۲ سر + ن^۲ جب^۲ سر))

(۱۷) مع مع لق^۲/۳ جب بر ز بر ز سر صورت بیانیہ ایک حجم کی ہے اوسی ہیئت محددین قائم الزاویہ میں تبدیل کرو
حاصل ۱/۳ مع مع (ے − ع لا − ق ی) ز لا ز ی اسکے معنی علم ہندسہ کے موافق بیان کرنے چاہیے

(۱۸) اگر لا + ی + ے = لو اور لا + ی = لو مو اور ی = لو مو می تو ثابت کرو کہ
∞ مع ∞ مع ∞ مع مہ ز لا ز ی ز ے = ∞ مع ۱ مع ۱ مع مہ لو^۲ مو ز لو ز مو ز می

(۱۹) اگر لا₁ = لق جم بر₁

لا₂ = لق جب بر₁ جم بر₂

لا₃ = لق جب بر₁ جب بر₂ جم بر₃

لا_{ن−۱} = لق جب بر₁ جب بر₂ ... جب بر_{ن−۲} جم بر_{ن−۱}

لا_ن = لق جب بر₁ جب بر₂ ... جب بر_{ن−۲} جم بر_{ن−۱}

ثابت کرو کہ مع مع ... مہ ز لا₁ ز لا₂ ... ز لا_ن

= ≠ مع مع مع ... مہ لو ن-۱ زلق زبر ۱ زبر ۲ ... زبر ن-۱

اسمین مہ کوئی جملہ لا۱ اور لا۲ ... لان کا ہے اور جب اس جملہ مین مقادیر متغیر تبدیل کیجائین تو وہ مہ بنجاتا ہے اور حصہ قائم مقام

(جب سر۱) ن-۲ (جب سر۲) ن-۳ ... جب سرن-۲ کا ہے

بارہوان باب

کلیات محدود

(۲۵۲) جب کلی غیر محدود کسی جملہ کی معلوم ہوجاے تو فوراً کلی محدود کی قیمت موافق حدود معینہ مقدار متغیر کے حاصل ہو سکتی ہی بعض اوقات ہم خاص ترکیبون سے قیمت کلی محدود تو مقرر کر سکتے ہین مگر کلی غیر محدود کو صورت متناہی مین نہین بیان کر سکتے

بعض اوقات بغیر کلی محدود کے دریافت کرنے کے ہم یہہ بتلا سکتے ہین کہ اوسمین یہہ شرطی خواص ہین یعنے صورتون جنکے اندر کلی غیر محدود جملہ کی دریافت ہو سکتی ہی ایسی ہوتی ہین کہ کلی محدود خاص حدود غائی کے درمیان ایک قیمت ایسی رکہتی ہے کہ وہ ایسی سادہ صورت مین بیان ہوتی ہی کہ طلبہ کو اوسپر متنبہ ہونا چاہئی اس باب مین اس مضمون کی مثالین لکہتی ہین

(۲۵۳) فرض کرو کہ ج (لا) اور ح (لا) جملے جبریہ ناطقہ لا کے ہین ج (لا) ادنے درجہ کا جملہ بہ نسبت ح (لا) کے ہے اور مساوات ح (لا) = ۰ کی کوئی حقیقی جذر نہین ہے اب مطلوب یہہ ہے کہ قیمت

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ج(لا)}{ح(لا)}\, ز لا$$

کی دریافت کرین اور اس بات کو ہی دیکہین کہ موافق اوپر کے فرضون کے صورت بیانیہ جسکے کلی نکلتے ہین لا کی حقیقی قیمتون سے غیر متناہی نہین ہوتی۔

فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ کی زوج خیالی جذرون کا مہ + صہ √(-۱) اور مہ - صہ √(-۱) ہی تو $\frac{ج(لا)}{ح(لا)}$ جس سلسلہ مین تحلیل ہو سکتی ہی اوسمین درجہ دوم کی کسر متناظر

$$\frac{۲ ا (لا - سہ) + ۲ ب صہ}{(لا - سہ)^۲ + صہ^۲}$$

سے تعبیر ہو سکتی ہے مقادیر مستقل ا اور ب اس مساوات

ا - ب $\sqrt{(-1)}$ = $\frac{ح (سہ + صہ \sqrt{(-1)})}{ﺣ' (سہ + صہ \sqrt{(-1)})}$ سے دریافت ہوتی ہیں دفعہ ۲۱

اب مع $\frac{۲ ب صہ زلا}{(لا - سہ)^۲ + صہ^۲}$ = ۲ ب مس$^{-1}$ $\frac{لا - سہ}{صہ}$

اسواسطے ـــ مع $\frac{۲ ب صہ زلا}{(لا - سہ)^۲ + صہ^۲}$ = ۲ ب کہ

اور نیز ـــ مع $\frac{(لا - سہ) زلا}{(لا - سہ)^۲ + صہ^۲}$ = ـــ مع $\frac{طو زطو}{طو^۲ + صہ^۲}$

اور یہہ ظاہر ہے کہ دوسرے کلی حدود معینہ کے درمیان صفر ہے اسلئے کہ تعداد اً منفی حصہ برابر مثبت حصہ کے ہے پس ۲ ب کہ کلی کے اوس حصہ کو تعبیر کرتا ہے جو موافق زوج خیالی جذروں کے لیا جاسے

پس اگر ﺣ (لا) کو ۲ ن درجہ کا فرض کریں اور ب۱ اور ب۲ . . . ب ن ن ارقام ہوں جنکا نمونہ ب قرار دیا گیا ہے تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ـــ مع $\frac{ح (لا)}{ﺣ (لا)}$ زلا = ۲ کہ [ب۱ + ب۲ + . . . + ب ن]

(۲۵۴) دفعہ گذشتہ کی یہہ ایک مثال ہے کہ

ـــ مع $\frac{لا^م زلا}{۱ + لا^{۲ن}}$

پس یہیں م اور ن مثبت صحاح ہیں اور م چھوٹا ن سے ہے یہاں

ا - ب $\sqrt{(-1)}$ = $\frac{۱}{۲ن [سہ + صہ \sqrt{(-1)}]^{۲ن - ۲م - ۱}}$

اور یہہ معلوم ہے کہ قیمتیں سہ + صہ $\sqrt{(-1)}$ کی اس صورت بیانیہ سے حاصل ہو سکتی ہیں کہ جم $\frac{(۲لو + ۱) کہ}{۲ن}$ + $\sqrt{(-1)}$ جب $\frac{(۲لو + ۱) کہ}{۲ن}$

یہاں لو کی متواتر قیمتیں ۰ و ۱ و ۲ . . . ن - ۱ تک علم مثلث مستوی کا ۲۳ باب دیکھو پس موافق ڈی موئور کے ضابطہ کے

[سہ + صہ $\sqrt{(-1)}$]$^{۲ن - ۲م - ۱}$ = جم سر + $\sqrt{(-1)}$ جب سر

$$\text{سر} = (\text{۲ن} - \text{۲م} - \text{۱})\frac{(\text{۲لق}+\text{۱})\text{که}}{\text{۲ن}} = (\text{۲لق}+\text{۱})\text{ک} - (\text{۲لق}+\text{۱})\frac{(\text{۲م}+\text{۱})\text{ک}}{\text{۲ن}}$$

پس

$$\text{جم سر} + \sqrt{(-\text{۱})}\ \text{جب سر} = -\text{جم}(\text{۲لق}+\text{۱})\text{بر} + \sqrt{(-\text{۱})}\ \text{جب}(\text{۲لق}+\text{۱})\text{بر}$$

اسمین $\text{بر} = \frac{\text{۲م}+\text{۱}}{\text{۲ن}}\text{که}$

اسسے معلوم ہوا کہ

$$\text{ا} - \text{ب}\sqrt{(-\text{۱})} = \frac{\text{۱}}{\text{۲ن}}\left\{-\text{جم}(\text{۲لق}+\text{۱})\text{بر} + \sqrt{(-\text{۱})}\ \text{جب}(\text{۲لق}+\text{۱})\text{بر}\right\}$$

$$= -\frac{\text{جم}(\text{۲لق}+\text{۱})\text{بر} + \sqrt{(-\text{۱})}\ \text{جب}(\text{۲لق}+\text{۱})\text{بر}}{\text{۲ن}}$$

اسواسطے $\text{ب} = \frac{\text{جب}(\text{۲لق}+\text{۱})\text{بر}}{\text{۲ن}}$

اسسے معلوم ہوا کہ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{لا}^{\text{۲م}}}{\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲ن}}} = \frac{\text{که}}{\text{ن}}\left[\text{جب بر} + \text{جب ۳بر} + \text{جب ۵بر} + \cdots + \text{جب}(\text{۲ن}-\text{۱})\text{بر}\right]$$

علم مثلث مستوی کے ۲۲ باب کے موافق مجموعہ اس سلسلہ جیوب کا برابر $\frac{\text{جب}^{\text{۲}}\text{ن بر}}{\text{جب بر}}$ کے ثابت ہوسکتا ہے بالفعل اس صورت مین $\text{بر} = \frac{\text{۲م}+\text{۱}}{\text{۲ن}}\text{که}$ اور $\text{جب}^{\text{۲}}\text{ن بر} = \text{۱}$ اسواسطے

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{لا}^{\text{۲م}}\ \text{ئلا}}{\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲ن}}} = \frac{\text{که}}{\text{ن جب}\frac{\text{۲م}+\text{۱}}{\text{۲ن}}\text{که}}$$

یہہ ظاہر ہے کہ $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{لا}^{\text{۲م}}\ \text{ئلا}}{\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲ن}}}$ اوپر کے نتیجہ کا نصف ہے یعنے

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{لا}^{\text{۲م}}\ \text{ئلا}}{\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲ن}}} = \frac{\text{که}}{\text{۲ن جب}\frac{\text{۲م}+\text{۱}}{\text{۲ن}}\text{که}}$$

(۲۵۵) دفعہ گذشتہ کی اخر صورت قانونیہ مین $\text{لا}^{\text{۲ن}} = \text{ی}$ رکھو اور فرض کرو کہ $\frac{\text{۲م}+\text{۱}}{\text{۲ن}} = \text{ک}$ تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{ی}^{\text{ک}-\text{۱}}\ \text{ئی}}{\text{۱}+\text{ی}} = \frac{\text{که}}{\text{جب ک که}} \quad \cdots\cdots \ (\text{۱})$$

یہہ نتیجہ اون سب صورتون مین مستحکم ہے کہ ک کی قیمت ۰ اور ۱ کے درمیان ہو اسواسطے کہ مثبت صحاح م اور ن کے واسطے صرف یہہ قید ہے کہ م چھوٹا ن سے ہو اور اسواسطے م اور ن کو مناسب طور پر منتخب کرکے $\frac{\text{۲م}+\text{۱}}{\text{۲ن}}$ کو برابر کسی معین کسر واجب کے جسکا نسبتاً

جفت حالت اختصار میں ہو کر سکتے ہیں اگرچہ ہم $\frac{۲م+۱}{۲ن}$ کو کسی کسر و جیب کے برابر جسکا نسب نما طاق
حالت اختصار میں ہو ٹھیک ٹھیک نہیں کر سکتے مگر ہم اوسکو ایسا بنا سکتے ہیں کہ
وہ اس کسر سے ایسا کم فرق رکھے جتنا ہم چاہیں پس اسی استخراج نتیجہ مطلوب کا ہو جائیگا
آخر نتیجہ میں لا^{د} کو بجای ی کے رکھو اہمیں د کوئی مثبت مقدار ہے پس

$$\int_0^\infty \frac{\text{د}\,\text{لا}^{\text{دک}-\text{د}}\,\text{لا}^{\text{د}-۱}\,\text{زلا}}{۱+\text{لا}^{\text{د}}} = \frac{\text{کہ}}{\text{جب ک کہ}}$$

یعنی
$$\int_0^\infty \frac{\text{لا}^{\text{دک}-۱}\,\text{زلا}}{۱+\text{لا}^{\text{د}}} = \frac{\text{کہ}}{\text{د جب ک کہ}}$$

فرض کرو کہ ک د = صو تو
$$\int_0^\infty \frac{\text{لا}^{\text{صو}-۱}\,\text{زلا}}{۱+\text{لا}^{\text{د}}} = \frac{\text{کہ}}{\text{د جب}\frac{\text{صو}}{\text{د}}\text{کہ}}$$

مثبت مقادیر صو اور د کے لئے فقط یہہ قید ہی ہی کہ صو چھوٹا د سے ہو
طالب علم کو غالباً کوئی بڑی دقت اس ترکیب میں نہیں معلوم ہوئی ہوگی جیسے کہ مساوات (۱) کی
صداقت اوس حالت میں ثابت ہوئی کہ ک ایک کسر ایسی ہو جسکا نسب نما طاق حالت اختصار میں ہو
باوجود اس بات کے ہم کو مناسب معلوم ہوتا ہے کہ چند باتیں ایسی لکھیں کہ جیسے ہمارے دعوے کا اثبات
قطعی ہو اور اوسے مشق بہی خوب اس باب کے مضامین میں طلبہ کو ہو جاے

فرض کرو کہ
$$\text{لو} = \int_0^\infty \frac{\text{ی}^{\text{ک}-۱}\,\text{زی}}{۱+\text{ی}}$$

$$\text{لو} = \int_0^1 \frac{\text{ی}^{\text{ک}-۱}\,\text{زی}}{۱+\text{ی}} + \int_1^\infty \frac{\text{ی}^{\text{ک}-۱}\,\text{زی}}{۱+\text{ی}}$$

ی کے $\frac{۱}{\text{ے}}$ رکھو تو یہہ دریافت ہوگا کہ

$$\int_1^\infty \frac{\text{ی}^{\text{ک}-۱}\,\text{زی}}{۱+\text{ی}} = \int_0^1 \frac{\text{ے}^{-\text{ک}}\,\text{زے}}{۱+\text{ے}}$$ پس

$$\text{لو} = \int_0^1 \frac{\text{ی}^{\text{ک}-۱}+\text{ی}^{-\text{ک}}}{۱+\text{ی}}\,\text{زی}$$

اسواسطے
$$\frac{\text{زلو}}{\text{زک}} = \int_0^1 \frac{\text{لوک ی}}{۱+\text{ی}}\left(\text{ی}^{\text{ک}-۱}-\text{ی}^{-\text{ک}}\right)\text{زی} \quad . \; . \; . \; (۲)$$

مساوات (۲) سے ثابت ہوتا ہے کہ ی کے حدود غائی ۰ اور ۱ کے درمیان تہ لیجی منفی ہے اگر
$\text{ی}^{\text{ک}-۱}-\text{ی}^{-\text{ک}}$ بالاستقلال مثبت ہے اور مثبت ہی اگر $\text{ی}^{\text{ک}-۱}-\text{ی}^{-\text{ک}}$ بالاستقلال منفی ہی
اسے معلوم ہوا کہ تہ لیجی منفی ہے

اگر ک چھوٹا $\frac{1}{2}$ سے ہے اور مثبت ہی اگر ک بڑا $\frac{1}{2}$ سے ہے پس لو گھٹتا ہی جب ک
سے $\frac{1}{2}$ تک بڑھتا ہے اور لو بڑھتا ہی جب ک زیادہ $\frac{1}{2}$ سے انک ہوتا ہے
اب فرض کرو کہ $\frac{س}{ص}$ کسی کسر کو اوسکی حالت اختصار مین تعبیر کرتا ہی اور جسمین س
طاق صحیح عدد ہی اور ع کوئی بہت صحیح ہو اور فرض کرو کہ
$ک_1 = \frac{ع س - 1}{ع ص}$ اور $ک_3 = \frac{ع س + 1}{ع ص}$ اور $ک_2$ تعبیر $\frac{س}{ص}$ کو کرتا ہے اور
فرض کرو کہ $\sum \frac{ک^{1-}}{1+ ...}$ کی قیمتوں کو جب ک کے جگہ $ک_1$ اور $ک_2$ اور $ک_3$ مندرج
کرین $لو_1$ اور $لو_2$ اور $لو_3$ تعبیر کرتے ہین تو بموجب مساوات (۱) کے

$$لو_1 = \frac{ک}{جب\ ک_1 ک} \quad \text{اور} \quad لو_3 = \frac{ک}{جب\ ک_3 ک}$$

اب ہم ج اتنا بڑا مقرر کرتے ہین کہ $ک_1$ اور $ک_3$ دونو بڑی یا دونو چھوٹے $\frac{1}{2}$ سے ہون
اور پھر مساوات (۲) سے نیچہ استخراج کرکے یہہ نتیجہ پیدا کرتے ہین کہ
$لو_2$ تعداد درمیان $لو_1$ اور $لو_3$ کے واقع ہو پس $لو_2$ اپنا فرق $لو_1$ یا $لو_3$ سے اتنا
رکھہ سکتا ہے جتنا کہ فرق $لو_1$ اور $لو_3$ کے درمیان ہی اور اسلئی بدرجہ اولی $لو_2$ فرق
$\frac{ک}{جب\ ک_2 ک}$ سے اتنا نہین رکھہ سکتا جیسا کہ $لو_1$ فرق $لو_3$ سے رکھتا ہے
اسے معلوم ہوا کہ ج کو غیر محدود زیادہ کرنے سے اخر کو $لو_2 = \frac{ک}{جب\ ک_2 ک}$ ہوگا

یولر کی کلیات

(۲۵۶) کلی محدود

$$\sum لا^{ل-1} (1 - لا^{م})^{-1}\ ز لا$$

کو اول کلی یولر کی کہتے ہین اور اوسکو رمز ب (ل، م) سے تعبیر کرتی ہین اور اسکو بہی
بے کا جملہ بہی کہتے ہین

کلی محدود

$$\sum ی^{لا} لا^{ل-1}\ ز لا$$

کو دوم کلی یولر کی کہتے ہین اور اوسکو رمز جیم (ن) سے تعبیر کرتے ہین

اس کلی کو کبہی جیم کی کلی بہی کہتے ہین

اب ہم بعض خواص ان کلیات کی بیان کرتے ہین اور ان کلیات مین ل ا ور م اور ن مثبت مقادیر مستقلہ فرض کی گئی ہین

(۲۵۷) یولر کی اول کلی مین لا = ۱ ـ سے رکہو تو

$$\text{ا}\int \text{لا}^{\text{ل}-1}(1-\text{لا})^{\text{م}-1}\,\text{ز لا} = \text{ا}\int \text{سے}^{\text{م}-1}(1-\text{سے})^{\text{ل}-1}\,\text{ز سے}$$

اسسے معلوم ہوا کہ ل اور م مین تبادل ہو سکتا ہے اور اوسی لحیہ کلی کی قیمت مین فرق نہین آتا یعنے

$$\text{ب}(\text{ل و م}) = \text{ب}(\text{م و ل})$$

اب یولر کی اول کلی مین لا = $\frac{\text{ی}}{1+\text{ی}}$ کے رکہو تو

$$\text{ا}\int \text{لا}^{\text{ل}-1}(1-\text{لا})^{\text{م}-1}\,\text{ز لا} = \int_{0}^{\infty} \frac{\text{ی}^{\text{ل}-1}\,\text{ز ی}}{(1+\text{ی})^{\text{ل}+\text{م}}}$$

اور اسے کلی مین لا = $\frac{1}{1+\text{ی}}$ رکہو تو

$$\text{ا}\int \text{لا}^{\text{ل}-1}(1-\text{لا})^{\text{م}-1}\,\text{ز لا} = \int_{0}^{\infty} \frac{\text{ی}^{\text{م}-1}\,\text{ز ی}}{(1+\text{ی})^{\text{ل}+\text{م}}}$$

(۲۵۸) فرض کرو کہ $\text{ی}^{\text{لا}}$ = ی پس لا = لوگ $\frac{1}{\text{ی}}$ تو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\int_{0}^{\infty} \text{ی}^{-\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{ز لا} = \text{ا}\int \left(\text{لوگ}\,\frac{1}{\text{ی}}\right)^{\text{ن}-1}\text{ز ی}$$

اسسے ایک اور صورت جیم (ن) کی حاصل ہوتی ہے

(۲۵۹) کلی بالاجزا سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\int \text{ی}^{-\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{ز لا} = -\text{ی}^{-\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ن}\int \text{ی}^{-\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{ز لا}$$

اور $\text{ی}^{-\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}}$ معدوم ہوتی ہی جب لا = ۰ اور نیز جب لا = ∞ (علم حساب الجزئیات کی دفعہ ۱۵۲ دیکہو) پس

$$\int_{0}^{\infty} \text{ی}^{-\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{ز لا} = \text{ن}\int_{0}^{\infty} \text{ی}^{-\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{ز لا}$$

یعنی جیم (ن + ۱) = ن جیم (ن)

چونکہ $\int \text{ی}^{-\text{لا}}\,\text{ز لا} = -\text{ی}^{-\text{لا}}$ تو اسی سے یہہ حاصل ہوتا کہ $\int_{0}^{\infty} \text{ی}^{-\text{لا}}\,\text{ز لا} = 1$ یعنی

جیم (ا) = ا . . . (۲)

(ا) اور (۲) سے ہم دیکھتے اگر ک کوئی صحیح ہو تو

جیم (ل + ا) = لـ

جب ن صحیح عدد نہ ہو تو مساوات (ا) کو مکرر کام مین لاؤ تو قیمت جیم (ن) جب ل بڑا بہ نسبت واحد کے ہو موقوف جیم (م) پر ہو سکتا ہے اسمین م چھوٹا بہ نسبت واحد کے ہے

(۲۶۰) ک لا = ے کے فرض کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

صمع ی^{-ک لا} لا^{ن-۱} ر لا = ا/ک^ن صمع ی^{-ے} ے^{ن-۱} ر ے = جیم (ن)/ک^ن

(۲۶۱) اب ہم ایک مساوات عظیم ثابت کرتے ہین جیسی کہ یولر کی دونو کلیات اول اور دوم باہم مربوط ہوتے ہین

کلی ثنائی صمع صمع لا^{ل+م-۱} ک^{م-۱} ی^{-(ا+ک)لا} ر ک ر لا کی کلی اول بلحاظ لا کے لو تو ہم کو بموجب دفعہ ۲۶۰ کے یہہ حاصل ہوگا کہ

جیم (ل + م) صمع ک^{م-۱} ر ک / (ا + ک)^{ل+م}

اب پھر اسے کلی ثنائی کی اول بلحاظ ک کے کلی لو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

جیم (م) صمع ی^{-لا} لا^{ل+م-۱} / لا^م ر لا

یعنی جیم (م) صمع ی^{-لا} لا^{ل-۱} ر لا

یعنی جیم (م) جیم (ل)

اسے معلوم ہوا کہ صمع ک^{م-۱} ر ک / (ا+ک)^{ل+م} = جیم (ل) جیم (م) / جیم (ل + م)

اسے معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۲۵۷ کے

ب (ل و م) = جیم (ل) جیم (م) / جیم (ل + م)

(۲۶۲) دفعہ گذشتہ کے نتیجہ مین فرض کرو کہ ل + م = ا پس اگر م چھوٹا بہ نسبت واحد کے ہو تو

صمع ک^{م-۱} ر ک / (ا + ک) = جیم (م) جیم (ا - م)

چونکہ جیم (ا) = ا اسی معلوم ہوا کہ اگر م چھوٹا بہ نسبت واحد کے ہو تو

بحکم دفعہ ۲۵۵ کے

جیم (م) جیم (۱ − م) = کہ / جیب م کہ

(۲۶۳) م = $\frac{۱}{۲}$ آخر نتیجہ مین رکھو تو

جیم ($\frac{۱}{۲}$) جیم ($\frac{۱}{۲}$) = کہ

اسواسطے جیم ($\frac{۱}{۲}$) = √کہ

بتغیر دفعہ ۲۵۵ کے ہم کو یہ حاصل ہے کہ

[جیم ($\frac{۱}{۲}$)]^{۲} = ∫ ی$^{\frac{۱}{۲}-۱}$ زی / (۱ + ی) = ۲ ∫ زلا / (۱ + لا^{۲}) = ۲ × کہ/۲ = کہ

اسواسطے جیم ($\frac{۱}{۲}$) = √کہ

اب ایک اور ثبوت آخر نتیجہ کا لکھتے ہین

فرض کرو کہ لو = ∫ ی$^{-لا^{۲}}$ زلا تو یہہ ظاہر ہے کہ لو یہی

= ∫ ی$^{-ی^{۲}}$ زی

پس لو^{۲} = ∫ ی$^{-لا^{۲}}$ زلا × ∫ ی$^{-ی^{۲}}$ زی

= ∫ ∫ ی$^{-لا^{۲}-ی^{۲}}$ زلا زی بموجب دفعہ ۴۶ کے

اور دفعہ ۲۰۴ مین ثابت ہوا کہ کل تثناۃ

= $\frac{۱}{۴}$ ۲کہ ∫ ی$^{-لو^{۲}}$ لو زبر زلق = کہ/۴

اسواسطے لو = √کہ / ۲

اب جیم ($\frac{۱}{۲}$) = ∫ ی$^{-لا}$ لا$^{-\frac{۱}{۲}}$ زلا اسمین لا = ی^{۲} کے رکھو تو

جیم ($\frac{۱}{۲}$) = ۲ ∫ ی$^{-ی^{۲}}$ زی = ۲ لو = √کہ

(۲۶۴) اب ہم ایک صورت بیانیہ جیم (ں) کی لکھینگے جسے ایک اور اثبات دفعہ ۲۶۲ کے نتیجہ کا ہوگا ہم کو معلوم ہے کہ حد غائی (لا^{ھ} − ۱)/ھ کی اوس حالت مین کہ ھ غیر محدود کم ہو لوگ لا ہے اسسے معلوم ہوا کہ

$$(\text{لوک} \frac{1}{\text{لا}})^{\text{ں}-1} = \text{حد غائی} \left(\frac{1-\text{لا}^{\text{ھ}}}{\text{ھ}}\right)^{\text{ں}-1}$$

پس ہم یہہ لکھہ سکتے ہیں کہ

$$(\text{لوک} \frac{1}{\text{لا}})^{\text{ں}-1} = \left(\frac{1-\text{لا}^{\text{ھ}}}{\text{ھ}}\right)^{\text{ں}-1} + \text{ی}$$

اسمیں ی ایسی مقدار ہے جو غیر متناہی کم ہوتی ہے جب ھ غیر متناہی کم ہو

ھ $= \frac{1}{\text{د}}$ کے رکہو تو بموجب دفعہ ۲۵۸ کے

$$\text{جیم}(\text{ں}) = \text{د}^{\text{ں}-1} \int (1-\text{لا}^{\frac{1}{\text{د}}})^{\text{ں}-1} \text{ز لا} + \int \text{ی ز لا}$$

اول کلی میں لا = ے^د رکہو تو

$$\text{جیم}(\text{ق}) - \int \text{ی ز لا} = \int \text{ے}^{\text{د}-1} (1-\text{ے})^{\text{ں}-1} \text{زے}$$

یہہ ہمارے اختیار میں ہے کہ د کو ایک صحیح عدد مقرر کریں تو بائیں طرف کلی کے دفعہ ۲۳۳ میں

$$\frac{1 \times 2 \times 3 \ldots \text{د}}{\text{ں}(\text{ں}+1) \ldots (\text{ں}+\text{د}-1)} \text{د}^{\text{ں}-1}$$

اگر د غیر متناہی زیادہ ہو تو ی معدوم ہوتا ہے اور ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{جیم}(\text{ں}) = \text{حد غائی} \frac{1 \times 2 \times 3 \ldots \text{د}}{\text{ں}(\text{ں}+1) \ldots (\text{ں}+\text{د}-1)} \text{د}^{\text{ں}-1}$$

(۲۶۵) دفعہ گذشتہ کے نتیجہ سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{[\text{جیم}(\text{ں})]^2}{\text{جیم}(\text{ں}-\text{م})\,\text{جیم}(\text{ں}+\text{م})} = \left[1-\frac{\text{م}^2}{\text{ں}^2}\right]\left[1-\frac{\text{م}^2}{(\text{ں}+1)^2}\right]\left[1-\frac{\text{م}^2}{(\text{ں}+2)^2}\right] \ldots$$

ایک خاص صورت اسطرح بہی حاصل ہوسکتی ہے کہ ں = ۱ کے فرض کریں تو

$$\frac{1}{\text{جیم}(1-\text{م})\,\text{جیم}(1+\text{م})} = \left(1-\frac{\text{م}^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\text{م}^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{\text{م}^2}{3^2}\right) \ldots$$

صورت بیانیہ بائیں طرف کی برابر $\frac{\text{جیب م کہ}}{\text{م کہ}}$ کے ہے علم مثلث ستوی کا ۲۳ باب دیکہو پس

$$\text{جیم}(1-\text{م})\,\text{جیم}(1+\text{م}) = \frac{\text{م کہ}}{\text{جیب م کہ}}$$

اسواسطے $\text{جیم}(\text{م})\,\text{جیم}(1-\text{م}) = \frac{\text{کہ}}{\text{جیب م کہ}}$ .. (دفعہ ۲۵۹)

(۲۶۶) اب ہم یہہ مساوات قائم کرینگے ں صحیح عدد ہے کہ

$$\text{جیم}\left(\frac{1}{\text{ں}}\right)\text{جیم}\left(\frac{2}{\text{ں}}\right)\text{جیم}\left(\frac{3}{\text{ں}}\right) \ldots \text{جیم}\left(\frac{\text{ں}-1}{\text{ں}}\right) = (2\text{کہ})^{\frac{\text{ں}-1}{2}} \text{ں}^{-\frac{1}{2}}$$

اول فرض کرو کہ ن طاق ہو دفعہ ۲۶۲ مین م کی جگہ متواتر $\frac{۱}{ن}$ و $\frac{۲}{ن}$ و $\frac{۳}{ن}$ ... کو $\frac{ن-۱}{۲ن}$ تک رکھو اور ضرب دو تو

$$جیم\left(\frac{۱}{ن}\right) جیم\left(\frac{۲}{ن}\right) جیم\left(\frac{۳}{ن}\right) \cdots جیم\left(\frac{ن-۱}{ن}\right) = \frac{کہ^{\frac{ن-۱}{۲}}}{حب\ \frac{۱}{ن}کہ\ حب\ \frac{۲}{ن}کہ \cdots حب\ \frac{ن-۱}{۲ن}کہ}$$

$$= (۲کہ)^{\frac{ن-۱}{۲}}\ ن^{-\frac{۱}{۲}}$$ علم مثلث کا ۲۳ باب دیکھو

دوم فرض کرو کہ ن جفت ہی اس صورت مین م کی جگہ متواتر $\frac{۱}{ن}$ و $\frac{۲}{ن}$ ... $\frac{ن-۲}{۲ن}$ تک رکھو اور موافق سابق کے حاصل ضرب بناؤ اور دائین طرف کی رکن کو جیم $(\frac{۱}{۲})$ مین اور بائین طرف کی رکن کو $\frac{۱}{۲}$ کہ مین ضرب دو تو موافق سابق کے نتیجہ حاصل ہوگا

(۲۶۷) تمام صورت قانونیہ یہہ ہے کہ

$$جیم(لا)\ جیم\left(لا+\frac{۱}{ن}\right) جیم\left(لا+\frac{۲}{ن}\right) \cdots جیم\left(لا+\frac{ن-۱}{ن}\right)$$
$$= جیم(ن\ لا)\ (۲کہ)^{\frac{ن-۱}{۲}}\ ن^{\frac{۱}{۲}-ن\ لا}$$

جسکو اب ہم ثابت کرتے ہین فرض کرو کہ مج (لا)

$$\frac{ن^{ن\ لا}\ جیم(لا)\ جیم\left(لا+\frac{۱}{ن}\right) \cdots جیم\left(لا+\frac{ن-۱}{ن}\right)}{ن\ جیم(ن\ لا)}$$

کو تعبیر کرتا ہے تو ہم کو یہہ ثابت کرنا ہے کہ $مج(لا) = (۲کہ)^{\frac{ن-۱}{۲}}\ ن^{\frac{۱}{۲}}$

ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

$$مج(لا+۱) = \frac{ن^{ن\ لا+ن}\ جیم(لا+۱)\ جیم\left(لا+۱+\frac{۱}{ن}\right) \cdots جیم\left(لا+۱+\frac{ن-۱}{ن}\right)}{ن\ جیم(ن\ لا+ن)}$$

$$= \frac{ن^{ن}\ لا\left(لا+\frac{۱}{ن}\right)\left(لا+\frac{۲}{ن}\right) \cdots \left(لا+\frac{ن-۱}{ن}\right)}{(ن\ لا+ن-۱)(ن\ لا+ن-۲) \cdots ن\ لا}\ مج(لا)$$

$$= مج(لا)$$

علی ہذا القیاس مج (لا + ۲) = مج (لا + ۱) = مج (لا) اور اسیطرح عمل کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$مج(لا) = مج(لا+م)$$

اسمین م جتنا چاہین بڑا ہو سکتا اسے معلوم ہوا کہ مج (لا) برابر حد غائی مج (لب) کے اوس حال مین ہے کہ لب غیر متناہی ہو پس مج (لا) بے تعلق لا سے ہو یعنی اوسکی ایک ہی قیمت ہے

خواہ لا کچھ ہی ہو اسی معلوم ہوا کہ جب $لا = \frac{۱}{ن}$ کے ہو تو

مج (لا) کے وہی قیمت ہوگی پس دفعہ گذشتہ سے مسئلہ کا استخراج ہوتا ہے اس مسئلہ کا نام گاس کا مسئلہ ہے

(۲۶۸) جو دفعہ گذشتہ میں صورت قانونیہ قائم ہوئی ہے اوسکی طرفین کے لوکارتم اور جزری بلحاظ لا کے لو تو

$$\frac{ن\,جیم'(ن\,لا)}{جیم\,(ن\,لا)} = \frac{جیم'(لا)}{جیم\,(لا)} + \frac{جیم'(لا + \frac{۱}{ن})}{جیم\,(لا + \frac{۱}{ن})} + \ldots + \frac{جیم'(لا + \frac{ن-۱}{ن})}{جیم\,(لا + \frac{ن-۱}{ن})}$$

$+ ن\,لوک\,ن \ldots (۱)$

اسمیں جیم' (طو) بجائے $\frac{ز\,جیم\,(طو)}{ز\,طو}$ کے قائم ہوتا ہے

پھر جزری لو اور ں لا کے جگہ ے رکھو تو یہ حاصل ہوگا

$$\frac{ز^۲}{رے^۲}\,لوک\,جیم\,(ے) = \frac{۱}{ن^۲}\left[\frac{ز^۲\,لوک\,جیم\,(لا)}{ز\,لا^۲} + \frac{ز^۲\,لوک\,جیم\,(لا + \frac{۱}{ن})}{ز\,لا^۲}\right.$$

$$\left. + \frac{ز^۲\,لوک\,جیم\,(لا + \frac{ن-۱}{ن})}{ز\,لا^۲}\right\}$$

اگر ں غیر متناہی بنایا جاے تو بائیں طرف معدوم ہو جاتی ہی اسواسطے کہ وہ آخر کو

$\frac{۱}{ن}\ \overset{لا + ۱}{\underset{لا}{مع}}\ \frac{ز^۲\,لوک\,جیم\,(لا)}{ز\,لا^۲}\ ز\,لا$

یعنی $\frac{۱}{ن}\left[\frac{ز\,لوک\,جیم\,(لا + ۱)}{ز\,لا} - \frac{ز\,لوک\,جیم\,(لا)}{ز\,لا}\right]$

اسسے ہم کو معلوم ہوتا ہے کہ اگر ے غیر متناہی ہو تو $\frac{ز^۲\,لوک\,جیم\,(ے)}{رے^۲}$ معدوم ہوتا ہے

اب $جیم\,(لا) = \frac{جیم\,(لا + ۱)}{لا} = \frac{جیم\,(لا + ۲)}{لا\,(لا + ۱)} = \frac{جیم\,(لا + ۳)}{لا\,(لا + ۱)(لا + ۲)}$

لوکارتم لو اور دو مرتبہ جزری بلحاظ لا کے لو تو

$$\frac{ز^۲\,لوک\,جیم\,(لا)}{ز\,لا^۲} = \frac{۱}{لا^۲} + \frac{۱}{(لا + ۱)^۲} + \frac{۱}{(لا + ۲)^۲} + \ldots \text{غیر متناہی}\ (۲)$$

لا کے ہر مثبت قیمت کے موافق سلسلہ الضافی ہے

جاود غائی ۱ اور لا کے درمیان کلی لو تو

$$\frac{ز\,لوک\,جیم\,(لا)}{ز\,لا} + س = (۱ - \frac{۱}{لا}) + (\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{لا + ۱})$$

$$+ (\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{لا + ۲}) + \ldots (۳)$$

اسمین $\int$ لوک جیم (لا) کے بجگہ جب لا = ا کے ہو ـ س قائم ہوتا ہے
زلا

سلسلہ جسکی ن ویں رقم $\frac{1}{ن}$ ـ $\frac{1}{ن + لا - ١}$ ہی موافق لا کے ہر مثبت قیمت کے

انضمامی ہی کیونکہ ہم اس امر واقعی سے یہہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ وہ سلسلہ اسطرح پیدا ہوتا ہے

کہ سلسلہ انضمامی جسکے تمام رقمیں ایک ہی علامت رکہتی ہیں کلی حدود غائی تناہی کے درمیان لی گئی

یا سلسلہ کا انضمامی ہونا اس امر واقعی سے ستنبط کرو کہ رقم عام $\frac{لا - ١}{ن (ن + لا - ١)}$ ہی

اور وہ کم بہ نسبت $\frac{لا - ١}{(ن - ١)^٢}$ کے پس سلسلہ تعداداً چہوٹا بہ نسبت ایک اور سلسلہ

کے ہوا جسکا انضمامی ہونا ہم کو معلوم ہے

مقدار س کو یولر کی مقدار مستقلہ کہتے ہیں وہ طرح طرح کی سورتین اپنے دکہاتی ہے

وہ اوپر اس صورت ـ $\frac{جیمَ (١)}{جیم (١)}$ یعنی ـ جیمَ (١) کے صورت مین نمودار ہوئی ہے

اب جیم (ن) = $\int$ ی$^{-لا}$ لا$^{ن-١}$ زلا اسواسطے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے

کہ جیمَ (ن) = $\int$ ی$^{-لا}$ لا$^{ن-١}$ لوک لا زلا اور

جیمَ (١) = $\int$ ی$^{-لا}$ لوگ لا زلا

پہر (١) مین فرض کرو کہ لا = ا تو

$$\frac{جیمَ (ن)}{جیم (ن)} - لوک ن = \frac{1}{ن} \left\{ \frac{جیمَ (١)}{جیم (١)} + \frac{جیمَ (١ + \frac{1}{ن})}{جیم (١ + \frac{1}{ن})} + \cdots + \frac{جیمَ (١ + \frac{ن-١}{ن})}{جیم (١ + \frac{ن-١}{ن})} \right\}$$

ن غیر متناہی زیادہ کرو تو بائین طرف کا رکن ایک خاص کلی یعنی $\int_1^2$ $\frac{}{زلا}$ لوک جیم (لا) زلا

یعنی لوک (۲) ـ لوک جیم (١) یعنی صفر ہو جائیگی

اسے معلوم ہوا کہ حد غائی $\frac{جیمَ (ن)}{جیم (ن)}$ ـ لوک ن کی جب ن غیر متناہی ہو صفر ہے

(۳) مین فرض کرو کہ لا غیر متناہی تو جو نتیجہ اسی نکالا ہے اوسکی استعانت سے ہم کو معلوم ہوتا ہے کہ

جب ن غیر متناہی ہو تو س برابر حد غائی

$$١ + \frac{1}{٢} + \frac{1}{٣} + \frac{1}{٤} \cdots + \frac{1}{ن} - لوک ن$$ کے ہے

موافق اصول کے یہہ ثابت ہو سکتا ہے کہ یہہ حد غائی تمنای ہی جبر مقابلہ کا ۵ ۴ باب ۱۲ مثال دیکھا

قیمت س کے اعشاریہ کے دس مرتبہ تک ۰،۵۷۷۲۱۵۶۶۴۹ ہے

حساب اسکا پچاس مرتبہ کے اعشاریہ تک شینکس صاحب نے کیا ہے

(۲۶۹) مساوات (۲) دفعہ گذشتہ میں لا کو لا + ۱ سے تبدیل کرو تو

$$\frac{ز^{2}\,\text{لوک جیم}\,(۱+لا)}{ز\,لا^{2}} = \frac{1}{(لا+۱)^{2}} + \frac{1}{(لا+۲)^{2}} + \frac{1}{(لا+۳)^{2}} + \dots$$

ن − ۲ دفعہ جزئی لو تو

$$\frac{ز^{ن}\,\text{لوک جیم}\,(۱+لا)}{ز\,لا^{ن}} = \underline{ن-۱}\,(-۱)^{ن} \left[\frac{1}{(لا+۱)^{ن}} + \frac{1}{(لا+۲)^{ن}} + \frac{1}{(لا+۳)^{ن}} + \dots \right]$$

فرض کرو کہ صن سلسلہ لانہایت $۱ + \frac{1}{۲^{ن}} + \frac{1}{۳^{ن}} + \dots$ کو تعبیر کرتا ہے

تو اگر ن چھوٹا ۲ سے نہ ہو تو قیمت $\frac{ز^{ن}\,\text{لوک جیم}\,(۱+لا)}{ز\,لا^{ن}}$ کی

$\underline{ن-۱}\,(-۱)^{ن}$ صن ہی جب کہ لا = ۰

ورنیز قیمت $\frac{ز\,\text{لوک جیم}\,(۱+لا)}{ز\,لا}$ کی − س ہو گی جب کہ لا = ۰

اسسے معلوم ہوا کہ موافق ضابطہ میک لارن صاحب کے

$$\text{لوک جیم}\,(۱+لا) = -س\,لا + \frac{ص_{۲}\,لا^{2}}{۲} - \frac{ص_{۳}\,لا^{3}}{۳} + \frac{ص_{۴}\,لا^{4}}{۴} - \dots$$

خاصیت کو دفعہ ۲۵۹ کے مساوات (۱) کے ساتھہ شامل کریں تو یہہ نتیجہ نکلیگا کہ اگر جیم (لا) موافق لا کے اون تمام قیمتوں کے جو ۰ اور $\frac{1}{۲}$ کی درمیان ہیں یا موافق اون تمام قیمتوں کے جو $\frac{1}{۲}$ اور ۱ کے درمیان ہیں یا موافق اون تمام قیمتوں کے جو ۱ اور ۲ کی درمیان ہوں معلوم ہیں اور علی ہذا القیاس تو جیم (لا) موافق لا کے تمام مثبت قیمتوں کے معلوم ہو جائیگا اور سلسلہ جو ابھی معلوم ہوا ہی اوسسے قیمت لوک جیم (لا) کی بہی معلوم ہو جائیگی اور پہر اوسکے جیم (لا) کی قیمت موافق لا کے اون تمام قیمتوں کے جو ۱ اور $۱\frac{1}{۲}$ کے درمیان واقع ہو

پس ہم جیم (لا) کا حساب موافق لا کی تمام مثبت قیمتوں کے کر سکتے ہیں لیجنڈر صاحب نے جدول لوک جیم (لا) کے قیمتوں کے بنائی ہے اور یہہ جدول اختصار کے ساتھ ڈی مورگن کے علم حساب الجزئیات میں بہی موجود ہے

(۲۷۰) سلسلہ جو لوگ جیم (۱+لا) کے واسطے حاصل ہوا ہے اوسکو اعلی درجہ کا انضمامی بنا سکتے ہیں

$$\text{لوک جیم}(۱+\text{لا}) = -\text{س}\,\text{لا} + \frac{\text{صر}_۲\,\text{لا}^۲}{۲} - \frac{\text{صر}_۳\,\text{لا}^۳}{۳} + \cdots$$

$$\text{لوگ جیم}(۱-\text{لا}) = \text{س}\,\text{لا} + \frac{\text{صر}_۲\,\text{لا}^۲}{۲} + \frac{\text{صر}_۳\,\text{لا}^۳}{۳} + \cdots$$

$$\text{اب جیم}(۱+\text{لا})\,\text{جیم}(۱-\text{لا}) = \text{لا جیم}(\text{لا})\,\text{جیم}(۱-\text{لا})$$

$$= \frac{\text{لا کہ}}{\text{جیب لا کہ}} \quad \text{بموجب دفعہ ۲۶۲ کے}$$

$$\text{اسواسطے لوک}\,\frac{\text{لا کہ}}{\text{جیب لا کہ}} = \text{صر}_۲\,\text{لا}^۲ + \tfrac{۱}{۲}\,\text{صر}_۴\,\text{لا}^۴ + \tfrac{۱}{۳}\,\text{صر}_۶\,\text{لا}^۶ + \cdots$$

$$\text{اور لوک جیم}(۱+\text{لا}) = \tfrac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا کہ}}{\text{جیب لا کہ}} - \text{س}\,\text{لا} - \frac{\text{صر}_۳\,\text{لا}^۳}{۳} - \frac{\text{صر}_۵\,\text{لا}^۵}{۵} - \cdots$$

اس نتیجہ کو اسطرح بہی لکہ سکتے ہیں کہ

$$\text{لوک جیم}(۱+\text{لا}) = \tfrac{۱}{۲}\,\text{لوگ}\,\frac{\text{لا کہ}}{\text{جیب لا کہ}} - \tfrac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,\frac{۱+\text{لا}}{۱-\text{لا}}$$

$$+ (۱-\text{س})\,\text{لا} - \tfrac{۱}{۳}(\text{صر}_۳-۱)\,\text{لا}^۳ - \tfrac{۱}{۵}(\text{صر}_۵-۱)\,\text{لا}^۵ - \cdots$$

اب آخر سطر میں جو سلسلہ لکہا ہی وہ بہت جلد انضمامی اوس حالت میں ہو جاتا ہے کہ لا تعداداً چہوٹا $\tfrac{۱}{۲}$ سے ہو

(۲۷۱) دفعہ ۲۶۸ کے مساوات (۲) سے ہم کو معلوم ہوتا ہے کہ $\frac{\text{ز}^۲\,\text{لوک جیم}(\text{لا})}{\text{ز لا}^۲}$ ہمیشہ مثبت ہی اور اگر لا مثبت ہو تو وہ متناہی بہی ہے اسی معلوم ہوا کہ $\frac{\text{ز لوک جیم}(\text{لا})}{\text{ز لا}}$ جبر مقابلہ کے موافق ایسی ہی زیادہ ہوتا ہی جیسے کہ لا سے غیر متناہی زیادہ ہوتا ہے اور سوا ایک دفعہ کے وہ کبہی معدوم نہیں ہوتی پس جیم (لا) ان لا کی قیمتوں کے ترتیب میں کوئی حد خاصی زیادتی کی نہیں رکہہ سکتا ہی اور سوا ایک کے کوئی حد خاصی کمی کی بہی نہیں رکہہ سکتا اس بات کا دیکہنا کچہ بات نہیں ہی کہ جیم (لا) حد خاصی کمی کے لا = ۱ اور لا = ۲ کے درمیان رکہتا،

جیم (۱ + لا) کے حد غائی کمی کے تشخیص کرنے کے واسطے ہم جزی کسے ایک سلسلہ کے جو لوک جیم (۱ + لا) کے واسطے حاصل ہوا ہے لین اور ما حصل کو برابر صفر کے لکھین اسے ایک مساوات حاصل ہوگی جسے امتحان سی یہہ معلوم ہو گا کہ ۱ + لا = وغیرہ ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۶ ، ۱

(۲۷۲) بہت سے کلیات محدود ارقام جیم جملوں مین بیان ہو سکتے ہین اب ہم بعض مثالین لکھتے ہین

کلی $\int_0^\infty$ ی$^{-ط^۲ لا^۲}$ زلا مین ط لا کی جگہ ی رکھو تو

$\int_0^\infty \frac{ی^{-ی} \; زی}{۲ ط \; ی^{\frac{۱}{۲}}}$ یعنی $\frac{۱}{۲ ط}$ جیم $(\frac{۱}{۲})$ یعنی $\frac{\sqrt{\pi}}{۲ ط}$ حاصل ہوگا

اب پہر $\frac{\int_0^۱ لا^{ل-۱} (۱ - لا)^{م-۱} \, زلا}{(لا + ط)^{ل+م}}$ مین $\frac{لا}{لا + ط} = \frac{ی}{۱ + ط}$ رکھو تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا

$\frac{۱}{ط^م (۱ + ط)^ل} \int_0^۱ ی^{ل-۱} (۱ - ی)^{م-۱} \, زی$ یعنی $\frac{۱}{ط^م (۱ + ط)^ل} \frac{جیم (ل) جیم (م)}{جیم (ل + م)}$

پہر $\int_0^۱ لا^{ل-۱} (۱ - لا^۲)^{م-۱}$ زلا مین لا^۲ = ی کے رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$\frac{۱}{۲} \int_0^۱ ی^{\frac{ل}{۲}-۱} (۱ - ی)^{م-۱} \, زی$ یعنی $\frac{جیم (\frac{ل}{۲}) جیم (م)}{۲ جیم (\frac{ل}{۲} + م)}$

پس $\int_0^{\frac{\pi}{۲}}$ جب^ع ہ حم^ن ہ زہ = $\int_0^۱ لا^ع (۱ - لا^۲)^{\frac{ن-۱}{۲}}$ زلا

$= \int_0^۱ لا^{ع+۱-۱} (۱ - لا^۲)^{\frac{ن+۱}{۲}-۱} \, زلا = \frac{جیم (\frac{ع+۱}{۲}) جیم (\frac{ن+۱}{۲})}{۲ جیم (\frac{ع+ن}{۲} + ۱)}$

پہر $\int_0^۱ \frac{لا^{ل-۱} (۱ - لا)^{م-۱} \, زلا}{[ط لا + ص (۱ - لا)]^{ل+م}}$ مین $لا = \frac{ص ی}{ط (۱ - ی) + ص ی}$ رکھو تو یہہ حاصل ہوگا

$\frac{۱}{ط^ل ص^م} \int_0^۱ ی^{ل-۱} (۱ - ی)^{م-۱} \, زی$ یعنی $\frac{جیم (ل) جیم (م)}{ط^ل ص^م جیم (ل + م)}$

(۲۷۳) $\int_0^ط لا^{ل-۱} (ط - لا)^{م-۱}$ زلا مین لا = ط ی رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$ط^{ل+م-۱} \int_0^۱ ی^{ل-۱} (۱ - ی)^{م-۱} \, زی$ یعنی $ط^{ل+م-۱} \frac{جیم (ل) جیم (م)}{جیم (ل + م)}$

(۲۷۴) اس اضعاف کلی کی قیمت دریافت کرو کہ

$\iiint \ldots لا^{ل-۱} ی^{م-۱} ے^{ن-۱} \ldots$ زلا زی زے . . .

کلی اسطرح لی گئی ہی کہ او سیمین مقادیر متغیرکے تمام مثبت قیمتین اس شرط کے ساتہہ مقرر کی گئی ہین کہ لا + ی + ے + . .

واحد سے بڑا نہ ہو

اب ہم فرض کرینگے کہ مقادیر متغیر تین ہیں اسواسطے کلی مثلثہ ہے اور جو ترکیب کلی مثلثہ کے واسطے ہم لکھینگے وہی اور ترکیب ہر صورت میں خواہ تعداد مقادیر متغیر کی کتنی ہی ہو کام میں آئینگے

مقادیر متغیر میں سے ایک کے موافق کلی لیں فرض کرو کہ اول ے کے موافق کلی لیتے ہیں تو حدود غائی ۰ اور ۱ - لا - ی کے درمیان ہونگیں تو ان حدود غائی کے درمیان

$$\text{مع}\ ے^{ن-۱}\ رے = \frac{(۱ - لا - ی)^{ن}}{ن} = \frac{\text{جیم}(ن)}{\text{جیم}(ن+۱)} (۱ - لا - ی)^{ن}$$

اب باقی مقادیر متغیر میں سے کسی مقدار کے موافق کلی لو فرض کرو کہ ی کے موافق کلی لی گئی تو حدود غائی ۰ اور ۱ - لا ہونگیں اور ان حدود غائی کے درمیان بحکم دفعہ ۲۷۳ کے

$$\text{مع}\ ی^{م-۱} (۱ - لا - ی)^{ن}\ ری = \frac{(۱ - لا)^{م+ن}\ \text{جیم}(م)\ \text{جیم}(ن+۱)}{\text{جیم}(م + ن + ۱)}$$

اب لا کے لحاظ سے کلی حدود غائی ۰ اور ۱ کے درمیان لو تو ان حدود غائی کے درمیان

$$\text{مع}\ لا^{ل-۱} (۱ - لا)^{م+ن}\ رلا = \frac{\text{جیم}(ل)\ \text{جیم}(م+ن+۱)}{\text{جیم}(ل + م + ن + ۱)}$$

اسسے معلوم ہوا کہ آخر کو نتیجہ یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\text{جیم}(ن)}{\text{جیم}(ن+۱)} \cdot \frac{\text{جیم}(م)\ \text{جیم}(ن+۱)}{\text{جیم}(م+ن+۱)} \cdot \frac{\text{جیم}(ل)\ \text{جیم}(م+ن+۱)}{\text{جیم}(ل + م + ن + ۱)}$$

یعنی

$$\frac{\text{جیم}(ل)\ \text{جیم}(م)\ \text{جیم}(ن)}{\text{جیم}(ل + م + ن + ۱)}$$

(۲۷۵) قیمت اس اضعاف کلی کی دریافت کرو کہ

$$\text{مع مع مع} \ldots و^{ل-۱}\ س^{م-۱}\ ط^{ن-۱} \ldots رو\ رس\ رط$$

کلی ایسی لی گئی ہی کہ اوسمیں مقادیر متغیر کی تمام مثبت قیمتیں اس شرط کے ساتھہ مقرر ہوسکتی ہیں کہ

$$\left(\frac{و}{ح}\right)^{ع} + \left(\frac{س}{ص}\right)^{ق} + \left(\frac{ط}{ط}\right)^{ف} + \ldots$$

واحد سے بڑا نہ ہو

فرض کرو کہ $لا = \left(\frac{و}{ح}\right)^{ع}$ اور $ی = \left(\frac{س}{ص}\right)^{ق}$ اور $ے = \left(\frac{ط}{ط}\right)^{ف}$ . . .

تو کلی کی یہہ صورت ہوجائیگی کہ

$$\frac{ل_{صہ}^{ل} \; صہ^{م} \; لہ^{ن} \ldots}{ع \; ں \; د \ldots} \; مع \, مع \, مع \ldots لا^{\frac{ل}{ع}-1} \; ی^{\frac{م}{ں}-1} \; ے^{\frac{ن}{د}-1} \ldots \; زلا \, زی \, زے$$

اسمین یہہ شرط ضروری کہ لا + ی + ے . . . بڑی واحد سی نہ ہون تو کلی کی قیمت موافق دفعہ گذشتہ کے یہہ ہوگی کہ

$$\frac{صہ^{ل} \; صہ^{م} \; لہ^{ن}}{ع \; ں \; د \ldots} \; \frac{جیم\left(\frac{ل}{ع}\right) جیم\left(\frac{م}{ں}\right) جیم\left(\frac{ن}{د}\right) \ldots}{جیم\left(\frac{ل}{ع} + \frac{م}{ں} + \frac{ن}{د} + \ldots + 1\right)}$$

اسکو ضابطہ ہچون ڈرجلٹ کہتے ہین اور لوولی جو اوسکو توسیع دی ہی اوسکا بیان دفعات ۲۷۷ اور ۲۷۸ مین کرینگے

(۲۷۶) دفعہ گذشتہ کی ایک آسان صورت لکہتی ہین کہ فرض کرو ع اور ں اور د . . . مین سے ہر ایک واحد ہوا ور سہ و صہ و ی . . . ہر ایک برابر مقدار مستقل صہ کے ہو تو یہہ شرط ہوگی کہ فر + سر + طر . . . بڑی صہ سے نہ ہون اسواسطی قیمت کلی

$$مع \, مع \, مع \ldots فر^{ل-1} \, سر^{م-1} \, طر^{ن-1} \ldots \; زفر \, زسر \, زطر \text{ کی}$$

$$صہ^{ل+م+ن+\ldots} \; \frac{جیم(ل) \, جیم(م) \, جیم(ن)}{جیم(ل + م + ن + \ldots + 1)}$$

اسکو ن $صہ^{ل+م+ن \ldots}$ سے تعبیر کرتے ہین

علی ہذا القیاس اگر کلی ایسے لیجائے کہ مجموعہ مقادیر متغیر کا زیادہ صہ + ∆ صہ سے نہ ہو تو یہہ نتیجہ حاصل ہوگا کہ

$$ن\,(صہ + \Delta صہ)^{ل+م+ن+\ldots}$$

اسسے ہم یہہ نتیجہ نکالتی ہین کہ قیمت کلی کی مقادیر متغیر کی تمام ان مثبت قیمتوں پر وسعت پاتی ہے جو مقادیر متغیر کے مجموعہ کو صہ اور صہ + ∆ صہ کے درمیان بناتی ہے

$$ن\left[(صہ + \Delta صہ)^{ل+م+ن+\ldots} - صہ^{ل+م+ن+\ldots}\right]$$

اور جب ∆ صہ غیر محدود کم ہو تو اسکے یہہ صورت ہوجائیگے کہ

ت (ل + م + ن + ۰۰۰) هہ^ل + م + ن + ۰۰۰ -۱^ ∆ هہ

یعنی جیم (ل) جیم (م) جیم (ن) ۰۰۰ / جیم (ل + م + ن + ۰۰۰) هہ^ل + م + ن + ۰۰۰ -۱^ ∆ هہ

(۲۷۷) مطلوب یہہ ہے کہ اضعاف کلی

مع مع مع ۰۰۰ لا^ل-۱^ ی^م-۱^ ے^ن-۱^ ۰۰ ح (لا + ی + ے + ۰۰۰) زلا زی زے

کو کلی مفرد میں بتذیل کریں

کلی ایسے لی گئی کہ تمام مقادیر متغیر کے مثبت قیمتیں اس شرط کو پورا کرتی ہیں کہ لا + ی + ے + بڑا س سے نہیں ہے

آسانی کے واسطے ہم یہہ فرض کرتے ہیں کہ تین مقادیر متغیر ہیں تو بموجب دفعہ گذشتہ کے

اگر ح (لا + ی + ے) کے جگہہ واحد لکھا جائے تو کلی کا وہ حصہ جو مقادیر متغیر کے مجموعہ کو هہ اور هہ + ∆ هہ کے درمیان فرض کرنے سے پیدا ہوتا ہے آخر کو یہہ ہو جائیگا کہ

جیم (ل) جیم (م) جیم (ن) / جیم (ل + م + ن) هہ^ل + م + ن -۱^ ∆ هہ

اور اگر مجموعہ مقادیر متغیر کا هہ اور هہ + ∆ هہ کے درمیان واقع ہو تو قیمت ح (لا + ی + ے) کی صرف ح (هہ) سے تفاوت بقدر اوسے مقدار کے رکھی کا جسکا مرتبہ مثل ∆ هہ کی ہے

اسسے معلوم ہوا کہ ∆ هہ کے مربع کے چھوڑ دینے پر کلی کا وہ حصہ جو مقادیر متغیر کے مجموعہ کو هہ اور هہ + ∆ هہ کے درمیان فرض کرنے سے پیدا ہوتا ہے آخر کار

جیم (ل) جیم (م) جیم (ن) / جیم (ل + م + ن) ح (هہ). هہ^ل + م + ن -۱^ ∆ هہ ہوگا

اسسے معلوم ہوا کہ کل کلی یہہ ہے کہ

جیم (ل) جیم (م) جیم (ن) / جیم (ل + م + ن) س مع ح (هہ) هہ^ل + م + ن -۱^

یہہ عمل سب صورتوں پر حاوی ہے خواہ مقادیر متغیر کی کچھہ ہی تعداد ہو

(۲۷۸) اسیطرح کلی مثلثہ

مع مع مع فر^ل-۱^ شر^م-۱^ ظر^ن-۱^ ح {(فر/ا)^ب^ + (شر/ب)^ق^ + (ظر/ج)^ر^} زفر زشر زظر

مقادیر متغیر کے تمام مثبت قیمتوں کے اس شرط کے ساتھ کہ

$$\left(\frac{م}{ص}\right)^{ع} + \left(\frac{س}{ص}\right)^{ق} + \left(\frac{ط}{ر}\right)^{ر}$$

بڑا س سے نہ ہو برابر

$$\frac{ل\,ص\,م\,ر\;جیم\left(\frac{ل}{ع}\right)جیم\left(\frac{م}{ق}\right)جیم\left(\frac{ق}{ر}\right)}{ع\;ق\;ر\;جیم\left(\frac{ل}{ع}+\frac{م}{ق}+\frac{ل}{ر}\right)} \int ح(ص)\, ص^{\frac{ل}{ع}+\frac{م}{ق}+\frac{ل}{ر}-1}\, ز ص$$

یہہ عمل اون سب صورتوں پر حاوی ہوسکتا ہے جنمین تعداد مقادیر متغیر کی کچھہ ہی ہو

(۲۷۹) کلی مثناۃ

$$\iint \frac{لا^{ع-1}\, ی^{ں-1}\, ز ی\, ز لا}{(لو+طلا+ص ی)^{ع+ق}}$$

کو کلی مفرد مین تبدیل کرو

اسمین کلی لا اور ی کے تمام مثبت قیمتوں کے موافق اس شرط کے ساتھہ لی گئی ہین کہ لا + ی بڑا ک سے نہ ہو اور لو اور ط اور ص مثبت مقادیر مستقلہ ہین

فرض کرو کہ ط چھوٹا ص سے ہے تو ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

$$لو + طلا + ص ی = لو + ط(لا+ی) - (ط-ص)ی = \mathbf{لو} - س$$

اسمین **لو** بجای لو + ط (لا + ی) کے اور س بجای (ط - ص) ی کے قائم ہوا ہے

پس $(لو+طلا+ص ی)^{-ع-ق}$

$$= \mathbf{لو}^{-ع-ق}\left\{1 + (ع+ق)\frac{س}{\mathbf{لو}} + \frac{(ع+ق)(ع+ق+1)}{1\times2}\frac{س^2}{\mathbf{لو}^2} + \dots\right\}$$

یہان سلسلہ انضمامی ہے

اب کلی مثناۃ مفروضہ کی ہئیت اسطرح بدل سکتی ہے کہ اوسکے ہر رقم پر دفعہ ۲۷۷ کے ترکیب کو عمل مین لائین پس کلی مثناۃ

$$= ک^{ع}\left[\frac{جیم(ع)جیم(ق)}{جیم(ع+ق)}\frac{ط^{ع+ق-1}}{(لو+طو)^{ع+ق}} + \frac{جیم(ع)جیم(ں+1)}{جیم(ع+ق+1)}(ع+ق)\frac{(ط-ص)}{(لو-طو)^{ع+ق}}ط^{ع+ق}\right.$$

$$\left.+\frac{جیم(ع)جیم(ں+2)}{جیم(ع+ں+2)}\frac{(ع+ں)(ع+ں+1)}{1\times2}\frac{(ط-ص)^2\, ط^{ع+ق+1}}{(لو+طو)^{ع+ں+2}} + \dots\right\} ز طو$$

زھھ

= جیم (ع) کب مع $\frac{\text{طو}^{\text{ع}+\text{ق}-1}}{(\text{لو}+\text{ط طو})^{\text{ع}+\text{ق}}}$ { $\frac{\text{جیم (ق)}}{\text{جیم (ع + ق)}}$ + $\frac{\text{(ع + ق) جیم (ق + ۱)}}{\text{جیم (ع + ق + ۱)}}$ $\frac{\text{(ط - ص) طو}}{\text{لو + ط طو}}$

+ $\frac{\text{(ع + ق) (ع + ق + ۱) جیم (ق + ۲)}}{\text{جیم (ع + ق + ۲)}}$ $\frac{\text{(ط - ص)}^2 \text{طو}^2}{1\times2\,(\text{لو} + \text{ط طو})^2}$ + . . . } ز طو

= $\frac{\text{جیم (ع) جیم (ق)}}{\text{جیم (ع + ق)}}$ کب مع $\frac{\text{طو}^{\text{ع}+\text{ق}-1}}{(\text{لو}+\text{ط طو})^{\text{ع}+\text{ق}}}$ [۱ + $\frac{\text{ق (ط - ص) طو}}{\text{لو + ط طو}}$

+ $\frac{\text{ق (ق + ۱)}}{1\times2}$ $\frac{\text{(ط - ص)}^2 \text{طو}^2}{(\text{لو} + \text{ط طو})^2}$ + . . .] ز طو

= $\frac{\text{جیم (ع) جیم (ق)}}{\text{جیم (ع + ق)}}$ کب مع $\frac{\text{طو}^{\text{ع}+\text{ق}-1}}{(\text{لو}+\text{ط طو})^{\text{ع}+\text{ق}}}$ { ۱ - $\frac{\text{(ط - ص) طو}}{\text{لو + ط طو}}$ }$^{-\text{ق}}$ ز طو

= $\frac{\text{جیم (ع) جیم (ق)}}{\text{جیم (ع + ق)}}$ کب مع $\frac{\text{طو}^{\text{ع}+\text{ق}-1}\ \text{ز طو}}{(\text{لو}+\text{ط طو})^{\text{ع}}(\text{لو}+\text{ص طو})^{\text{ق}}}$

اسیطرح سے کلی مثلثہ

مع مع مع $\frac{\text{لا}^{\text{ع}-1}\ \text{ی}^{\text{ق}-1}\ \text{ے}^{\text{د}-1}\ \text{ز لا ز ی}}{(\text{لو}+\text{ط لا}+\text{ص ی}+\text{س ے})^{\text{ع}+\text{ق}+\text{د}}}$

کو کلی مفرد مین تحویل کر سکتے ہین

اسمین کلی . لا اور ی اور ے کے تمام مثبت قیمتوں کے موافق اس شرط کے ساتھہ کی گئی ہے کہ

لا + ی + ے بڑا ک سے نہین ہی اور مقادیر لو اور ط اور ص اور س مثبت مقادیر مستقل ہین

فرض کرو کہ ط چھوٹا ص سے یا س سے نہین ہے تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

لو + ط لا + ص ی + س ے = لو + ط (لا + ے) + ص ی - (ط - س) ے

موافق سابق کے عمل کرنے سے ہم کلی مثلثہ مفروضہ مثبت کو ایک ایسی سلسلہ میں تبدیل کر سکتے ہین کہ

ہر یک رقم اوسکی

$\frac{\text{(ع + ق + د) (ع + ق + د + ۱) . . . (ع + ق + د + تو - ۱)}}{\text{ا تو}}$ (ط - س)$^{\text{تو}}$

اور کلی مثلثہ مع مع مع $\frac{\text{لا}^{\text{ع}-1}\ \text{ی}^{\text{ق}-1}\ \text{ے}^{\text{د}+\text{تو}-1}\ \text{ز لا ز ی ز ے}}{(\text{لو}+\text{ط لا}+\text{ط ے}+\text{ص ی})^{\text{ع}+\text{ق}+\text{د}+\text{تو}}}$ کے حاصل ضرب سے

تعبیر ہو سکتی ہے

تو موافق سابق کے ہم ثابت کر سکتے ہین کہ کلی مثلثہ جسکا ابھی اوپر ذکر ہوا ہیئت بدل کر

$$\frac{\text{جیم}(ع)\,\text{جیم}(ق)\,\text{جیم}(د+و)}{\text{جیم}(ع+ق+د+و)} \text{ کہ مع } \frac{طو^{ع+ق+د+و-1}\ \text{رطو}}{(لو+طو)^{ع+د+و}(لو+ص طو)^{د}}$$

اسسے معلوم ہوا کہ آخر کو کلی مثلثہ برابر ہے

$$\frac{\text{جیم}(ع)\,\text{جیم}(ق)\,\text{جیم}(د)}{\text{جیم}(ع+ق+د)} \text{ کہ مع } \frac{طو^{ع+ق+د-1}}{(لو+طو)^{ع+د}(لو+ص طو)^{ق}} \left[1-\frac{(ط-س)طو}{لو+طو}\right]^{-د} زطو$$

یعنی

$$\frac{\text{جیم}(ع)\,\text{جیم}(ق)\,\text{جیم}(د)}{\text{جیم}(ع+ق+د)} \text{ کہ مع } \frac{طو^{ع+ق+د-1}\ \text{زطو}}{(لو+طو)^{ع}(لو+ص طو)^{ق}(لو+س طو)^{د}}$$

یہہ عمل ہر صورت پر حاوی ہی خواہ مقادیر متغیر کی تعداد کچھ ہے ہو اور جسطرح دفعات ۲۷۷ اور ۲۷۸ مین دفعہ ۲۷۵ کے عمل کو توسیع دی تہی اوسیطرح یہان بہی توسیع ہو سکتی ہے

(۲۸۰) اضعاف کلی کو کلی مفرد مین تبدیل کرو

$$مع\ مع\ مع\ ...\ ح\,(ط_1 لا_1 + ط_2 لا_2 + ...+ ط_ن لا_ن)\ زلا_1 زلا_2 ...\ زلا_ن$$

یہہ کلی ایسی لی گئی ہی کہ تمام مقادیر متغیر کی وہ قیمتین لی گئی ہین جو اس شرط کو پورا کرتی ہین کہ

$لا_1^2 + لا_2^2 + ... + لا_ن^2$ بڑا واحد سے نہین ہے

دفعہ ۲۴۲ مین طبیعے مناۃ کی ہئت بدلنی کی ترکیب جو لکہی ہی اوسکو متواتر عمل مین لانے سے اضعاف کلی کی تحویل اس صورت ہو جائیگے کہ

$$مع\ مع\ مع\ ...\ ح\,(ک\ لا_1)\ زلا_1\ زلا_2\ ...\ زلا_ن$$

اسمین $ک = \sqrt{(ط_1^2 + ط_2^2 + ... + ط_ن^2)}$

اور ان تبدلات ہئت سے اس شرط مین کچھہ خلل عاید نہین ہوتا کہ مقادیر متغیر کے مربعوں کی

پس اول ہم کو قیمت اضعاف کلی مع مع مع ... زلا۲ زلا۳ ... زلان قیمت اس شرط کے ساتھہ دریافت کرنی چاہی کہ $لا_2^2 + لا_3^2 + ... + لا_ن^2$ بڑا بہ نسبت $1 - لا_1^2$ کی نہ ہو اول فرض کرو کہ مقادیر متغیر صرف مثبت قیمتین رکہتی ہین تو ہم کو قیمت کلی کی دفعہ ۲۷۵ مین ان باتون کے فرض کرنے سے حاصل ہو جائیگی کہ مقادیر ل دم ...

مین سے ہر یک واحد ہے اور مقادیر ع وق ... مین سے ہر یک مقدار ۲ ہے اور مقادیر

لو - ں لوگ (ں + لو) = طو² - ں لوگ ں . . . (۴)

لیکن بموجب ٹیلر صاحب کے ضابطہ کے

لوگ (ں + لو) = لوگ ں + لو/ں - لو² / ۲(ں + بر لو)²

اسمین بر یک کسر واجب ہے پس (۴) کی یہہ صورت ہو جائیگی کہ

ں لو² / ۲(ں + بر لو)² = طو²

اسواسطے √(ں) لو / √(۲) (ں + بر لو) = طو . . . (۵)

اسواسطے لو = √(۲) ں طو / √(ں) - بر طو √۲ . . . . . (۶)

لیکن (۳) سے زلا/زطو = ۲ لا طو / لا - ں = ۲ طو + ۲ ں طو / لو

= √(۲ ں) + ۲ (۱ - بر) طو . . . (۶)

اسسے معلوم ہوا کہ (۲) یہہ ہو جائیگی کہ

∞∫ ی^-لا لا^ں زلا = ی^-ں ں^ں ∞∫ ی^-طو² [√(۲ں) + ۲ (۱ - بر) طو] زطو

اور ∞∫ ی^-طو² زطو = √(ک) پس

∞∫ ی^-لا لا^ں زلا = ی^-ں ں^ں √(۲ ں ک) [۱ + √(۲/ں ک) ∞∫ ی^-طو² (۱ - بر) طو زطو] . . . (۷)

لیکن اس سبب سے کہ ۱ - بر نسبت ہی اور واحد سے چھوٹا ہی تو عددی قیمت ∞∫ ی^-طو² (۱ - بر) طو زطو کی چھوٹا ∞∫ ی^-طو² طو زطو سے ہے یعنی چھوٹی ہے نسبت ½ کے ہی پس (۷) سے یہہ نتیجہ نکالتے ہین کہ جب ں غیر محدود زیادہ ہوتا ہے تو قیمت جیم (ں + ۱) کی ی^-ں ں^ں √(۲ ں ک) سے قریب واحد کے پہونچتی ہے اور یہی اوسکی حد غائی ہوتی ہے

ہم دیکھتے ہین کہ اصلی مساوات (۱) مین طو² ہے اور جو طو نہین ہے اسسے معلوم ہوا کہ طو کی علامت کا ہم کو اختیار ہی اور ہم اوسکو ایسا مقرر کر سکتے ہین کہ مساوات (۵) مین کل جذر لازمی اور √(ں) اور √۲ دونو مثبت فرض کیے جاوین

کلیات محدود کا جزئیات سے حاصل کرنا یا بلحاظ مقادیر مستقلہ کے کلی لینے

(۲۸۳) اب ہم چند مثالیں لکھتے ہیں جنمیں بلحاظ مقدار مستقل کے جزئی لیکر اوسکے وساطت سے کلی محدود حاصل کرتے ہیں دفعہ ۲۱۳ دیکھو

قیمت ص∞ مع ی^(-ط^۲ لا^۲) جم ۲ لو لا زلا کی دریافت کرو کلی محدود کا نام لو رکھو

زلو / زلو = -۲ ص∞ مع لا ی^(-ط^۲ لا^۲) جب ۲ لو لا زلا

بائیں طرف کے رکن کی کلی بالا جزا لو تو

زلو / زلو = -۲ لو لو / ط^۲

اسواسطے زلوک ی / زلو = - ۲ لو / ط^۲

اسواسطے لوک ی = - لو^۲ / ط^۲ + مقدار مستقل

اسواسطے لو = ا ی^(-لو^۲/ط^۲)

اسمیں ا ایک مقدار مستقل بلحاظ لو کے ہے یعنی اوسمیں لو داخل نہیں ہے ا کے دریافت کرنے کے واسطے ہم لو = ۰ کے فرض کرتے ہیں تو لو کی یہہ صورت ہوگی

ص∞ مع ی^(-ط^۲ لا^۲) زلا یعنی √ک / ۲ط (دفعہ ۲۷۲) اسسے معلوم ہوا کہ

ا = √ک / ۲ط اور

ص∞ مع ی^(-ط^۲ لا^۲) جم ۲ لو لا زلا = √ک / ۲ط ی^(-لو^۲/ط^۲)

(۲۸۴) دفعہ ۲۱۴ میں ہم نے بیان کیا ہے کہ جب کلی کی حدود غائی میں سے ایک غیر متناہی ہوتی ہے تو عمل جزئی کا بلحاظ مقدار مستقل کے غیر مصئون ہوتا ہے اس صورت حال میں وہ اساسی درست ہوجاتا ہے ہم کو یہہ ثابت کرنا ہے کہ ص∞ مع ی^(-ط^۲ لا^۲) ق زلا معدوم ہوجاتا ہے جب کہ ق آخر کو غیر محدود چھوٹا ہو یہہ ظاہر ہی کہ یہہ مقدار تعداداً چھوٹی بہ نسبت ق ا ص∞ مع ی^(-ط^۲ لا^۲) زلا ہے اسمیں ق ا بڑی سی بڑی قیمت ق کی ہے یعنی چھوٹا بہ نسبت √ک / ۲ط ق ا کے ہے لیکن یہہ معدوم ہوتا ہے جب کہ ق ا معدوم ہوتا ہے اور اسی کے ساتھہ تصورات اینده صور توں میں بہی ہوسکتی ہیں

(۲۸۵) قیمت $\int_0^\infty$ ی^-ک لا جب لو لا زلا کی دریافت کرو اور اسکو لو سے تعبیر کرو تو

زلو / زلو = $\int_0^\infty$ ی^-ک لا جم لو لا زلا

لیکن $\int$ ی^-ک لا جم لو لا زلا = ی^-ک لا (لو جب لو لا - ک جم لو لا) / (ک۲ + لو۲)

اسواسطے $\int_0^\infty$ ی^-ک لا جم لو لا زلا = ک / (ک۲ + لو۲)

پس زلو / زلو = ک / (ک۲ + لو۲)

اسواسطے لو = مس^-۱ لو/ک

کسی مقدار مستقل کی ضرورت نہیں ہے کیونکہ لو معدوم لو کے ساتھہ ہوتا ہے یہہ نتیجہ ک کی مثبت قیمت کے مواقف مستحکم ہے اگر ہم فرض کریں کہ ک غیر متناہی کم ہوتا ہے تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$\int_0^\infty$ (جب لو لا / لا) زلا = π/۲

اگر لو مثبت ہو اور اگر لو منفی ہو تو نتیجہ - π/۲ ہوگا

اب ہم کلی محدود تشخیص کرتے ہیں کہ

$\int_0^\infty$ (جب لو لا جم صو لا / لا) زلا

اسواسطے کہ وہ مساوی ہے

۱/۲ $\int_0^\infty$ (جب (لو + صو) لا / لا) زلا + ۱/۲ $\int_0^\infty$ (جب (لو - صو) لا / لا) زلا

اور ان دو کلی محدود میں سے ہر یک کی قیمت مقرر ہو سکتی ہے کہ

(۲۸۶) قیمت $\int_0^\infty$ ی^-(لا۲ + ط۲/لا۲) زلا کی دریافت کرو اسکو لو سے تعبیر کرو تو

زلو / زط = - ۲ ط $\int_0^\infty$ ی^-(لا۲ + ط۲/لا۲) زلا / لا۲

فرض کرو کہ لا = ط/ے تو ے کی حدود غائی ∞ اور ۰ ہیں اور ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

زلو / زط = - ۲ لو

اسواسطے زلوگ لو / زط = - ۲

اسواسطے لوگ لو = - ۲ ط + مقدار مستقل

اسواسطے $لو = ا\, ی^{-۲ط}$

ا کی تشخیص کرنے کے واسطے فرض کرو کہ ط = ۰ تو $لو = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}$ اسواسطے

$ا = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}$ پس

$$\int_۰^\infty ی^{-(لا^۲ + \frac{ط^۲}{لا^۲})} زلا = \frac{\sqrt{\pi}}{۲} ی^{-۲ط}$$

(۲۸۷) بلحاظ مقدار مستقل کے بہی کلی لیکر کلیات محدود کو ہم تشخیص کیا کرتے ہیں اس اصول کو اسطرح قائم کرتے ہیں کہ

فرض کرو $لو = \int_ط^ص مع\,(لا\,و\,س)\, زلا$

تو $\int_ف^ش لو\, زس = \int_ف^ش \int_ط^ص مع\,(لا\,و\,س)\, زس\, زلا$

$= \int_ط^ص \int_ف^ش مع\,(لا\,و\,س)\, زلا\, زس$

کیونکہ جب حدود غائی مستقل ہوں تو وہاں کلی کی ترتیب کو خواہ کسی طرح لو

(دفعہ ۶۲) اب ہم بعض مثالیں اس ترکیب کے لکھتی ہیں

(۲۸۸) ہم کو معلوم ہے کہ $\int_۰^\infty ی^{-ک لا} زلا = \frac{۱}{ک}$

طرفین کی کلی بلحاظ ک کے حدود غائی ط اور ص کے درمیان لو تو

$$\int_۰^\infty \frac{ی^{-ط لا} - ی^{-ص لا}}{لا} زلا = لوک \frac{ص}{ط}$$

اس بات سے یہی تنبہ کرنا چاہی کہ $\int_۰^\infty ی^{-ط لا} \frac{زلا}{لا}$ اور $\int_۰^\infty ی^{-ص لا} \frac{زلا}{لا}$ دونو غیر متناہی ہین اسواسطے کہ $\int_۰^س ی^{-ط لا} \frac{زلا}{لا}$ بڑا بہ نسبت $ی^{-س ط} \int_۰^س \frac{زلا}{لا}$ ہی اور $\int_۰^س \frac{زلا}{لا}$ غیر متناہی ہے مگر یہہ بیان خلاف اس بیان کے نہیں ہی کہ $\int_۰^\infty \frac{ی^{-ط لا} - ی^{-ص لا}}{لا} ز$ غیر متناہی ہی اور اس کلی کی قیمت بغیر دریافت کرنے کے ہاتی سی ثابت ہوسکتا ہے کہ وہ متناہی اسواسطے کہ وہ برابر مجموعہ $\int_۰^س \frac{مج\,(لا)\, زلا}{لا}$ اور $\int_س^\infty \frac{مج\,(لا)\, زلا}{لا}$ کے ہے اسمین $مج\,(لا) = ی^{-ط لا} - ی^{-ص لا}$ اوران کلیوں مین سے دوسری کلی متناہی ہے اسواسطے کہ وہ چھوٹی بہ نسبت $\frac{۱}{س} \int مج\,(لا)\, زلا$ کے ہے یعنی چھوٹی بہ نسبت

$\frac{1}{س}\left(\frac{ی^{ط س}}{ط} - \frac{ی^{ص س}}{ص}\right)$ کے ہے

پس ہم کو امتحان $\int$ $\frac{ج(لا)}{لا}$ زلا کا کرنا ہے

اب بموجب میک لارن صاحب کے ضابطہ کے

$$ج(لا) = (ص - ط)\, لا + \frac{لا^2}{2}\, ج''(لابر)$$

اسمین بر کوئی کسر ہی پس $\frac{ج(لا)}{لا}$ چھوٹا بہ نسبت ص − ط + $\frac{ا\, لا}{2}$ کے ہے

اسمین ا بڑی سے بڑی قیمت $ج''(لا)$ کی اون قیمتوں میں سے ہے جو لا کے س سے

چھوٹی قیمتوں کے موافق لی جائیں اسے معلوم ہوا کہ

$\int$ $\frac{ج(لا)}{لا}$ زلا چھوٹا بہ نسبت (ص − ط) س + $\frac{ا\, س^2}{4}$ کے ہے

اور اسواسطے محدود ہے

(۲۸۹) ہم کو معلوم ہے کہ

$$\int ی^{-ک لا}\, جم\, لق\, لا\, زلا = \frac{ک}{ک^2 + لق^2}$$

طرفین کی کلی بلحاظ ک کے حدود غائی ط اور ص کے درمیان لو تو

$$\int \frac{ی^{-ط لا} - ی^{-ص لا}}{لا}\, جم\, لق\, لا\, زلا = \frac{1}{2}\, لوگ\, \frac{ص^2 + لق^2}{ط^2 + لق^2}$$

(۲۹۰) فرض کرو $\int \frac{جب\, لق\, لا}{لا}$ زلا کو ا سے اور $\int \frac{جم\, لق\, لا}{ا + لا^2}$ زلا کو ب سے

تعبیر کرو اب قیمتیں ا اور ب کی تشخیص کرو دفعہ ۲۸۵ میں ا کی تشخیص ایک اور ترکیب سے ہو چکی ہے

کلی امین ء کو بجای لق لا کے رکھو تو

$$ا = \int \frac{جب\, ء\, زء}{ء}$$

اسے ثابت ہوتا ہے کہ ا کو کچھ تعلق لق سے نہیں ہے

اور یہہ ہم کو حاصل ہے کہ $\frac{زب}{زلق} = -\int \frac{لا\, جب\, لق\, لا\, زلا}{ا + لا^2}$

اور $\int ب\, زلق = \int \frac{جب\, لق\, لا\, زلا}{لا(ا + لا^2)}$

پس لق $\int ب\, زلق - \frac{زب}{زلق} = \int \frac{(ا + لا^2)\, جب\, لق\, لا}{لا(ا + لا^2)}\, زلا = ا$

اسسے معلوم ہوا کہ لو تا مع ف زلو − زب/زلو − ا = ۰ (۱)

تی^لو مین ضرب دو اور کلی لو تو اس سبب سے کہ ا مستقل بلحاظ لو کے ہے یہہ حاصل ہوگا کہ

تی^لو [لو تا مع ب زلو + ب − ا] = مقدار مستقل کے

اب خواہ کچھہ ہی قیمت لو کے ہو تو ظاہر ہے کہ کلیان ا اور ب سے اور لو تا مع ب زلو سے تعبیر کی گئی متناہی ہین اسی معلوم ہوا کہ اخر مساوات مین مقدار مستقل صفر ہے اسواسطے کہ دائین طرف کا رکن جب لو غیر متناہی ہو معدوم ہوتا ہے

پس لو تا مع ب زلو + ب − ا = ۰ (۲)

(۱) اور (۲) سے زب/زلو = − ب

اسواسطے ب = س تی^لو

اسمین س کوئی مقدار مستقل ہے اور (۲) سے

ا = س تی^لو − س (تی^لو − ۱) = س

اسواسطے ب = ا تی^لو

اب لو غیر محدود کم ہوتا ہے تو ب کے صورت یہہ ہوجائیگی کہ ص تا مع زلا/(۱ + لا^۲) یعنی کہ/۲ کے

اسے معلوم ہوا کہ (۳) سے

ا = کہ/۲ اور ب = کہ/۲ تی^لو

ہم نے لو کو مثبت فرض کیا ہے یہہ ظاہر ہے کہ اگر لو منفی ہو تو ب کی وہی قیمت ہوگی جو لو کے مثبت ہونے سے ہوتی اور اگر ا کی علامت بدل جائے یعنی اگر لو منفی ہو تو ب = کہ/۲ ی^لو اور ا = − کہ/۲

ص تا مع حم لو لا زلا/(۱ + لا^۲) = کہ/۲ تی^لو کی جزئی بلحاظ لو کے لو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ص تا مع لا جب لو لا زلا/(۱ + لا^۲) = کہ/۲ تی^لو

اور اسے کلی کی کلی بلحاظ لو کے حدود غائی ۰ اور س کے درمیان لو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{جب لو لا زلا}}{\text{لا}(1+\text{لا}^2)} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \text{ی}^{-\text{ن}}\right)$$

(۲۹۱) دفعہ گزشتہ مین کلیات ا اور ب کی قیمتون کی تحقیقات نہایت استحکام کے ساتھہ کی گئی ہے لیکن اوس ترکیب ب کے قیمت دریافت کرنی کی بعض اوقات لکھی جاتی ہی وہ نہایت آسان ہی مگر قابل اطمینان اور اعتماد نہین اب ہم اس ترکیب کو لکھتی ہین کیونکہ اوسے ایک بڑی بات معلوم ہوتی ہے

فرض کرو کہ $\text{ب} = \int_{0}^{\infty} \frac{\text{جم لو لا}}{1+\text{لا}^2}\,\text{زلا}$

تو $\frac{\text{زب}}{\text{زلو}} = -\int_{0}^{\infty} \frac{\text{لا جب لو لا}}{1+\text{لا}^2}\,\text{زلا}$

اور $\frac{\text{ز}^2\text{ب}}{\text{زلو}^2} = -\int_{0}^{\infty} \frac{\text{لا}^2\,\text{جم لو لا}}{1+\text{لا}^2}\,\text{زلا}$

$= -\int_{0}^{\infty} \text{جم لو لا زلا} + \int_{0}^{\infty} \frac{\text{جم لو لا}}{1+\text{لا}^2}\,\text{زلا}$

$= \int_{0}^{\infty} \text{جم لو لا زلا} + \text{ب}$

اب ہم بعض بنا پر جنکا ابھی امتحان ہم کرینگے یہہ فرض کرتے ہین کہ $\int_{0}^{\infty} \text{جم لو لا زلا} = 0$

پس $\frac{\text{ز}^2\text{ب}}{\text{زلو}^2} = \text{ب}$

اس مساوات سے ب کو دریافت کرین طرفین مساوات کو $2\frac{\text{زب}}{\text{زلو}}$ مین ضرب دین اور کلی بلحاظ لو کے لین تو

$$\left(\frac{\text{زب}}{\text{زلو}}\right)^2 = \text{ھ} + \text{ب}^2$$

اسمین ھ ایک مقدار مستقل ہے یعنی ھ کو کچھہ لگاؤ لو سے نہین ہے پس

$$\frac{\text{زب}}{\text{زلو}} = \sqrt{\text{ھ} + \text{ب}^2}$$

اسواسطے $\frac{\text{زلو}}{\text{زب}} = \frac{1}{\sqrt{\text{ھ} + \text{ب}^2}}$

کلی لینے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{لو} + \text{ک} = \int \frac{\text{زب}}{\sqrt{\text{ھ} + \text{ب}^2}} = \text{لوک}\left[\text{ب} + \sqrt{\text{ھ} + \text{ب}^2}\right]$$

اسمین ک ایک اور مقدار مستقل ہے

پس $\text{ی}^{\text{لو}+\text{ک}} = \text{ب} + \text{ہا}\left(\text{صہ} + \text{ٹ}\right)$

انتقال اور مجذور اور تحویل کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ب} = \text{س}_{1}\,\text{ی}^{\text{لو}} + \text{س}_{2}\,\text{ی}^{-\text{لو}}$$

اسمین س$_1$ اور س$_2$ مقادیر مستقل ہین ان مقادیر مستقل کی قیمتین تشخیص کرنی چاہی

چونکہ ب غیر متناہی زیادہ ہوتا ہی تو س$_1$ = ۰ کے ہونا چاہی اور چونکہ $\text{ب} = \frac{\text{کج}}{۲}$

جب لو = ۰ تو س$_2$ = $\frac{\text{کج}}{۲}$ کے ہونا چاہی پس

$$\text{ب} = \frac{\text{کج}}{۲}\,\text{ی}^{-\text{لو}}$$

اب اس ترکیب مین جو باتین ہم نے فرض کرلی ہین اونکی تحقیقات کرتے ہین

چونکہ $\int \text{ی}^{-\text{طلا}}\ \text{جب لو لا ز لا} = -\text{ی}^{-\text{طلا}}\ \frac{\text{ط جب لو لا} + \text{لو جم لو لا}}{\text{ط}^2 + \text{لو}^2}$

اور $\int \text{ی}^{-\text{طلا}}\ \text{جم لو لا ز لا} = \text{ی}^{-\text{طلا}}\ \frac{\text{لو جب لو لا} - \text{ط جم لو لا}}{\text{ط}^2 + \text{لو}^2}$

اور ہم کو یہہ حاصل ہی $\int_{۰}^{\infty} \text{ی}^{-\text{طلا}}\ \text{جب لو لا ز لا} = \frac{\text{لو}}{\text{ط}^2 + \text{لو}^2}$

$$\int_{۰}^{\infty} \text{ی}^{-\text{طلا}}\ \text{جم لو لا ز لا} = \frac{\text{ط}}{\text{ط}^2 + \text{لو}^2}$$

اگر ط اور ایک مقدار مثبت ہو

اگر ط = ۰ کے فرض کرنا جائز ہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\int_{۰}^{\infty} \text{جب لو لا ز لا} = \frac{1}{\text{لو}} \quad \text{اور} \quad \int_{۰}^{\infty} \text{جم لو لا ز لا} = ۰$$

چونکہ $\int \text{جب لو لا ز لا} = -\frac{\text{جم لو لا}}{\text{لو}}$ اور $\int \text{جم لو لا ز لا} = \frac{\text{جب لو لا}}{\text{لو}}$ پس

اسی ظاہر یہہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جیب اور جیب التمام دونو زاویہ غیر متناہی کی صفر ہوتی ہین

اور اور صورتون مین بہی اسی نتیجہ کا اظہار ہوگا پس اسلئی یہہ بیان کیا جاے کہ

رموز غیر المعین جب ∞ اور جم ∞ مین سے ہر یک بیے شمار صورتون مین ہا نہایت

اور ۰ اوسط قیمت جب لا اور جم لا کا ہے

اس بات پر ہندسین کا بڑا اختلاف ہے اور اونکی جدا جدا رائین ہین اور اوسپر بحث بڑی

مباحثے ہوتی ہین اوسکا بیان کرنا اس اصول کی کتاب مین مناسب نہین

صور مفصلہ سے کلی محدود کا نکالنا

(۲۹۲) اگر ہم لوک (۱ - ط ی^لا√(-۱)) اور لوک (۱ - ط ی^-لا√(-۱)) کو پھیلائین اور جمع کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

لوک (۱ - ۲ ط جم لا + ط^۲)

= -۲ (ط جم لا + ط^۲/۲ جم ۲ لا + ط^۳/۳ جم ۳ لا + ۰۰۰)

اگر ط چھوٹا واحد سے ہو تو یہہ سلسلہ التصامی ہوگا طرفین کی بلحاظ لا کے حدود غائی ۰ اور ک کے درمیان کلی لین تو

کبمع لوگ (۱ - ۲ ط جم لا + ط^۲) زلا = ۰ ط چھوٹا بہ نسبت د کے ہے

اگر ط بڑا بہ نسبت واحد کے ہو تو اس سبب سے کہ

لوک (۱ - ۲ ط جم لا + ط^۲) = لوک ط^۲ + لوک (۱ - ۲/ط جم لا + ۱/ط^۲)

یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

کبمع لوگ (۱ - ۲ ط جم لا + ط^۲) زلا = ک لوک ط^۲ = ۲ ک لوک ط

اگر ط = ۱ تو دفعہ ۱۵ مین ثابت ہو سکتا ہے کہ کلی محدود صفر ہے

اب ہم اس نتیجہ کو اس صورت مین رکھتے ہین کہ

کبمع لوگ (ط^۲ - ۲ ط س جم لا + س^۲) زلا = ک لوک ک^۲

اسمین ک^۲ بڑا بہ نسبت دو مقادیر ط^۲ اور س^۲ کے ہے اور ان مین سے ہر ایک کی برابر ہے اگر وہ ایسمین برابر ہون

اس نتیجہ کی کلی بلحاظ ط کے لو تو وہ نتیجہ حاصل ہوگا جو دفعہ ۱۹۴ کے اخر مثال ہے

(۲۹۳) کلی بالا جزا سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

مع لوک (۱ - ۲ ط جم لا + ط^۲) زلا

= لا لوک (۱ - ۲ ط جم لا + ط^۲) - ۲ ط بمع $\frac{\text{لا جب لا ز لا}}{\text{۱ - ۲ ط جم لا + ط}^{۲}}$

اسسے معلوم ہوا کہ ط چھوٹا بہ نسبت ا کے ہے

کبمع $\frac{\text{لا جب لا ز لا}}{\text{۱ - ۲ ط جم لا + ط}^{۲}}$ = $\frac{\text{کہ}}{\text{۲ ط}}$ لوک (۱ + ط^۲) یعنی $\frac{\text{کہ}}{\text{ط}}$ لوک (۱ + ط)

اگر ط بڑا بہ نسبت ا کے ہو تو حاصل

$\frac{\text{کہ}}{\text{ط}}$ لوگ (۱ + ط) - $\frac{\text{کہ}}{\text{ط}}$ لوک ط یعنی $\frac{\text{کہ}}{\text{ط}}$ لوک (۱ + $\frac{۱}{\text{ط}}$) ہے

(۲۹۴) اگر ق صحیح تو اسیطرح یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

کبمع جم ق لا لوگ (۱ - ۲ ط جم لا + ط^۲) = - $\frac{\text{کہ}}{\text{ق}}$ ط^ق

اگر ط چھوٹا واحد سے ہو یا - $\frac{\text{کہ}}{\text{ق}}$ ط^{-ق} کے اگر ط بڑا واحد سے ہو

(۲۹۵) دفعہ گذشتہ میں کلی کی کلی بالاجزا لو تو ہم کو یہہ دریافت ہوتا ہے کہ

کبمع $\frac{\text{جب لا جب ق لا ز لا}}{\text{۱ - ۲ ط جم لا + ط}^{۲}}$ = $\frac{\text{کہ}}{\text{۲}}$ ط^{ق-۱} اگر ط چھوٹا واحد سے ہو

یا $\frac{\text{کہ}}{\text{۲}}$ ط^{-(ق+۱)} کے اگر ط بڑا واحد سے ہو

(۲۹۶) علے ہذا القیاس صور مفصلہ معلوم

$\frac{\text{۱ - ط}^{۲}}{\text{۱ - ۲ ط جم لا + ط}^{۲}}$ =

= ۱ + ۲ ط جم لا + ۲ ط^۲ جم ۲ لا + ۲ ط^۳ جم ۳ لا + ...

جسمیں ط چھوٹا بہ نسبت واحد کے ہے ہم بعض کلیات محدود کا استنباط کرسکتے ہیں پس

اگر ق صحیح ہو تو

کبمع $\frac{\text{جم ق لا ز لا}}{\text{۱ - ۲ ط جم لا + ط}^{۲}}$ = $\frac{\text{کہ ط}^{\text{ق}}}{\text{۱ - ط}^{۲}}$

اسواسطے کہ ہر یک رقم جسکی کلی لیتے ہیں حدود غایتہین سے معدوم ہوجاتی ہے

مگر ۲ ط^ق کبمع جم^۲ ق لا ز لا باقی رہتی ہے

(۲۹۷) قیمت $\overset{\infty}{\text{کبمع}}$ $\frac{۱}{\text{۱ + لا}^{۲}}$ $\frac{\text{ز لا}}{\text{۱ - ۲ ط جم س لا + ط}^{۲}}$ کی دریافت کرو

رقم $\frac{۱}{\text{۱ - ۲ ط جم س لا + ط}^{۲}}$ دفعہ ۲۹۶ کی طرح پہیل سکتی ہے پہر بموجب دفعہ

۲۹۱ کے ہر یک رقم کلی لو اور ماحصلوں کو جمع کرو تو یہہ حاصل ہو گا کہ

$$\frac{\text{ک}}{\text{۲}} \quad \frac{\text{۱}}{\text{۱ - ط}^{\text{۲}}} \quad \frac{\text{۱ + ط ی}^{\text{س}}}{\text{۱ - ط ی}^{\text{س}}}$$

(۲۹۸) علی ہذا القیاس

$$\text{مع لوک (۱ - ۲ ط جم س لا + ط}^{\text{۲}}\text{)} \frac{\text{ز لا}}{\text{۱ + لا}^{\text{۲}}} = \text{ک لوک (۱ - ۲ ی}^{\text{س}}\text{)}$$

(۲۹۹) علم مثلث سے یہہ ہم کو معلوم ہے کہ

$$\frac{\text{جب س لا}}{\text{۱ - ۲ ط جم س لا + ط}^{\text{۲}}} = \text{جب س لا + ط جب ۲ س لا + ط}^{\text{۲}} \text{ جب ۳ س لا + ۔۔۔}$$

ط چھوٹا ہے بہ نسبت ا کے ہے اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۲۹۱ کے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{مع} \frac{\text{لا جب س لا ز لا}}{\text{(۱ + لا}^{\text{۲}}\text{) (۱ - ۲ ط جم س لا + ط}^{\text{۲}}\text{)}} = \frac{\text{ک}}{\text{۲ (ی - ط)}}$$

بلحاظ س کے جزی لیں تو دفعہ ۲۹۸ سے یہی مستنبط ہو گا

(۳۰۰) $\text{مع} \frac{\text{لوک لا}}{\text{۱ - لا}} \text{ ز لا}$ کو دریافت کرو

(۱ - لا)$^{\text{۱-}}$ کی پھیلانے سے کلی کے واسطے ایک مسئلہ دریافت ہو گا جسکا

$\text{مع لا}^{\text{ن}} \text{ لوک لا ز لا}$ ہے

کلی بالاجزا سے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ وہ برابر $-\frac{\text{۱}}{\text{(۱ + ن)}^{\text{۲}}}$ ہی اسی معلوم ہوتا کہ ماحصل

$$- \left[\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{۴}} + \frac{\text{۱}}{\text{۹}} + \frac{\text{۱}}{\text{۱۶}} + \text{۔۔۔} \right]$$

ہی اور صورت قالوتید معلوم سے یہہ $-\frac{\text{ک}^{\text{۲}}}{\text{۶}}$ ہے

(۳۰۱) فرض کرو کہ ی$^{\text{لا}\sqrt{\text{-۱}}}$ یعنی جم لا + $\sqrt{\text{-۱}}$ جب لا کو مو تعبیر کرتا ہے پس اگر ج کوئی جملہ ہو تو بموجب ٹیلر صاحب کے ضابطہ کے

$$\text{ج (ط + مو) + ج (ط + مو}^{\text{۱-}}\text{)}$$

$$= \text{۲} \left[\text{ج (ط) + ج}' \text{(ط) جم لا} + \frac{\text{ج}'' \text{(ط)}}{\text{۱ × ۲}} \text{ جم ۲ لا + ۔۔۔} \right] \text{ اور}$$

$$\frac{\text{۱ - س}^{\text{۲}}}{\text{۱ - ۲ س جم لا + س}^{\text{۲}}} = \text{۱ + ۲ س جم لا + ۲ س}^{\text{۲}} \text{ جم ۲ لا + ۲ س}^{\text{۳}} \text{ جم ۳ لا + ۔۔۔}$$

اسواسطے

کبمع ح (ط + مو) + ح (ط + موا) / ۱ − ۲ س جم لا + س۲ زلا = ۲ک / ۱ − س۲ [ح (ط) + س ع (ط) + س۲ / ۱×۲ ع ً (ط) + ...]

= ۲ک / ۱ − س۲ ح (ط + س)

اس نتیجہ مین یہہ یاد رکہنا چاہی کہ س چہوٹا واحد سے ہے اور جملے ح (ط + مو) اور ح (ط + موا) ضابطہ ٹیلر کے موافق قابلیت پہیلنی کی رکہتی ہین

اسے طرح ثابت ہوسکتا ہے کہ

کبمع ج (ط + مو) − ج (ط + موا) / ۱ − ۲ س جم لا + س۲ جب لا زلا = ک ہا (−۱) / س [ح (ط + س) − ج (ط)]

اور کبمع ۱ − س جم لا / ۱ − ۲ س جم لا + س۲ [ح (ط + مو) + ج (ط + موا)] زلا

= ک [ج (ط + س) + ج (ط)]

مقادیر مستقلہ کی جگہ خیالی قیمتون کا اندراج

(۳۰۲) کلیات معلوم سے بعض اوقات کلیات محدود اسطرح بہی استنباط ہوجاتے ہین کہ جو اونمین مقادیر مستقلہ واقع ہون اونکی جگہ ناممکن قیمتین درج کرین یہہ عمل مدلل نہین ہے لیکن وہ بعض صورتین ایسی ظاہر کرتا ہے جنکا امتحان ہوسکتا ہے اور شاید اور ترکیبون سے ثابت بہی ہوجائے (ڈی مورگن کا علم حساب الجزئیات دیکہو)

اب ہم بعض مثالین اسکی لکہتی ہین

ہم کو یہہ حاصل ہے کہ صفمع ی^(−ع لا) لا^(ن−۱) = ع^(−ن) جیم (ن).

ع کی جگہ ط + ص ہا (−۱) رکہو اور فرض کرو کہ لق = ہا (ط۲ + ص۲) اور مس بر = ص / ط

پس ع = لق [جم بر + ہا (−۱) جب بر] پس

صفمع ی^(−[ط + ص ہا (−۱)] لا) لا^(ن−۱) زلا = لق^(−ن) [جم ن بر − ہا (−۱) جب ن بر] جیم (ن)

اب ممکن اور ناممکن حصون کے جدا کرنے سے

صفمع ی^(−ط لا) لا^(ن−۱) جم ص لا زلا = جیم (ن) جم (ن مس^(−۱) ص/ط) / (ط۲ + ص۲)^(ن/۲)

$$\int_{0}^{\infty} ی^{-ط لا} لا^{ن-۱} جم\, ص لا\, زلا = \frac{\Gamma(ن)\, جب\left(ن\, مس^{-۱} \frac{ص}{ط}\right)}{(ط^{۲} + ص^{۲})^{\frac{ن}{۲}}}$$

اثبات کی ترکیبیں اگر اسکی دیکھنی ہوں تو ڈی مورگن کا علم حساب الجزئیات دیکھو

(۳۰.۳) صورت قانونیہ

$$\int_{0}^{\infty} ی^{-ط لا^{۲}} زلا = \frac{\sqrt{\pi}}{۲\sqrt{ط}}$$

ط کو $\frac{۱ + \sqrt{(-۱)}}{\sqrt{۲}} س$ سے بدلو تو

$$\int_{0}^{\infty} ی^{-\sqrt{(-۱)}\, س^{۲} لا^{۲}} زلا = \frac{۱ - \sqrt{(-۱)}}{۲ س} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{۲}}$$

$$اسواسطے \int_{0}^{\infty} \left[جم\, س^{۲} لا^{۲} - \sqrt{(-۱)}\, جب\, س^{۲} لا^{۲}\right] زلا = \frac{۱ - \sqrt{(-۱)}}{۲ س} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{۲}}$$

$$اسواسطے \int_{0}^{\infty} جم\, س^{۲} لا^{۲}\, زلا = \frac{\sqrt{\pi}}{۲\sqrt{۲}\, س}$$

$$اور \int_{0}^{\infty} جب\, س^{۲} لا^{۲}\, زلا = \frac{\sqrt{\pi}}{۲\sqrt{۲}\, س}$$

اگر ی کو $س^{۲} لا^{۲}$ کی جگہ لکھیں تو یہہ صورتیں ہو جائنگی کہ

$$\int_{0}^{\infty} \frac{جب\, ی\, زی}{\sqrt{ی}} = \int_{0}^{\infty} \frac{جم\, ی\, زی}{\sqrt{ی}} = \sqrt{\frac{\pi}{۲}}$$

(۳۰.۴) کلی $\int_{0}^{\infty} ی^{-\left(لا^{۲} + \frac{ط^{۲}}{لا^{۲}}\right)ک} زلا$ میں فرض کرو کہ ی = لا $\sqrt{ک}$ تو کلی یہہ ہو جائیگی

$\frac{۱}{\sqrt{ک}} \int_{0}^{\infty} ی^{-\left(ی^{۲} + \frac{ک^{۲} ط^{۲}}{ی^{۲}}\right)} زی$ اور یہہ بموجب دفعہ ۲۸۶ کے معلوم ہے پس

$$\int_{0}^{\infty} ی^{-\left(لا^{۲} + \frac{ط^{۲}}{لا^{۲}}\right)ک} زلا = \frac{۱}{\sqrt{ک}} \frac{\sqrt{\pi}}{۲}\, ی^{-۲طک}$$

اب جم بر + $\sqrt{(-۱)}$ جب بر کو بجای ک کے لکھو تو بائیں طرف کا رکن

$$\frac{۱}{جم \frac{بر}{۲} + \sqrt{(-۱)}\, جب \frac{بر}{۲}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{۲}\, ی^{-۲ط\left(جم\, بر + \sqrt{(-۱)}\, جب\, بر\right)}$$

$$یعنی \frac{\sqrt{\pi}}{۲}\left[جم\left(۲ط\, جب\, بر + \frac{بر}{۲}\right) - \sqrt{(-۱)}\, جب\left(۲ط\, جب\, بر + \frac{بر}{۲}\right)\right] ی^{-۲ط\, جم\, بر}$$

$$پس \int_{0}^{\infty} ی^{-\left(لا^{۲} + \frac{ط^{۲}}{لا^{۲}}\right) جم\, بر} جم\left[\left(لا^{۲} + \frac{ط^{۲}}{لا^{۲}}\right) جب\, بر\right] زلا$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{۲}\, ی^{-۲ط\, جم\, بر}\, جم\left(۲ط\, جب\, بر + \frac{بر}{۲}\right)$$

$$اور \int_{0}^{\infty} ی^{-\left(لا^{۲} + \frac{ط^{۲}}{لا^{۲}}\right) جم\, بر} جب\left[\left(لا^{۲} + \frac{ط^{۲}}{لا^{۲}}\right) جب\, بر\right] زلا$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{۲}\, ی^{-۲ط\, جم\, بر}\, جب\left(۲ط\, جب\, بر + \frac{بر}{۲}\right)$$

$\text{صفر مع لوگ}\ \frac{۱ + ۲\,ن\,جم\,ط\,لا + ن^{۲}}{۱ + ۲\,ن\,جم\,ص\,لا + ن^{۲}}\ \frac{زلا}{لا} = لوک\,(۱+ن)\ لوگ\ \frac{ص^{۲}}{ط^{۲}}$

اگر ن چھوٹا واحد سے ہو یا برابر $لوک\,(۱ + \frac{۱}{ن})\ لوک\ \frac{ص^{۲}}{ط^{۲}}$

کے اگر ن بڑا واحد سے ہو

(۱۵) قیمت $\text{صفر مع}\left[ی^{-ط\,لا - سہ\,لا^{(۱-)}} - ی^{-ص\,لا - صہ\,لا^{(۱-)}}\right]\frac{زلا}{لا}$ کی دریافت کرو

اسمیں ط اور ص مثبت ہیں لیکن سہ اور صہ مثبت ہیں یا منفی ہیں اور ثابت کرو کہ وہ بالکل حقیقی ہونگے اگر $\frac{سہ}{ط} = \frac{صہ}{ص}$

(۱۶) ثابت کرو کہ $\text{ا مع}\ مم^{-۱}\,(۱ - لا + لا^{۲})\ زلا = \frac{کہ}{۲} - لوک\,۲$

(۱۷) ثابت کرو کہ $\text{صفر مع}\ \frac{زلا}{۱ + لا^{۲}}\ لوک\,(لا + \frac{۱}{لا}) = کہ\ لوگ\,۲$

(۱۸) $\text{صفر مع}\ \frac{جب\,لا}{لا}\ زلا$ کی قیمت سے

$$\text{صفر مع}\ \left(\frac{جب\,لا}{لا}\right)^{۲} زلا$$

سے استنباط کرو۔ حاصل دو تو کلیاں اسمیں برابر ہیں

(۱۹) ثابت کرو کہ $\text{صفر مع}\ \left(\frac{ی^{-ط\,لا} - ی^{-ص\,لا}}{لا}\right)^{۲} زلا = لوک\ \frac{(۲ط)^{۲ط}\,(۲ص)^{۲ص}}{(ط + ص)^{۲(ط+ص)}}$

(۲۰) ثابت کرو کہ $\text{صفر مع}\ \frac{لا\ لوک\ لا}{(۱ + لا)^{۲}}\ زلا = کہ$

(۲۱) ثابت کرو کہ $\text{صفر مع}\ \left(ی^{-\frac{ط^{۲}}{لا^{۲}}} - ی^{-\frac{ص^{۲}}{لا^{۲}}}\right) زلا = (ص - ط)\sqrt{کہ}$

(۲۲) ثابت کرو کہ $\text{صفر مع لوگ}\ \frac{ی^{لا} + ۱}{ی^{لا} - ۱}\ زلا = \frac{کہ^{۲}}{۴}$

(۲۳) ثابت کرو کہ $\text{ا مع}\ \frac{لا^{ک} - لا^{ل}}{لوک\ لا}\cdot\frac{زلا}{لا} = لوگ\ \frac{ک}{ل}$ اور اس مساوات کو $\text{ا مع}\ \frac{لا^{ق-۱}\ زلا}{لوک\ لا}$ کے ہئیت بدلی ہوئی حاصل سے $لا^{ل} = د$ کے فرض کرکے تطبیق دو

(۲۴) ثابت کرو کہ $\text{کہ/۲ مع}\ جب^{ن}\,بر\ زبر = \frac{\sqrt{کہ}}{۲}\cdot\frac{جیم\left(\frac{ن+۱}{۲}\right)}{جیم\left(\frac{ن+۲}{۲}\right)}$

(۲۵) ثابت کرو کہ $\text{ا مع}\ \frac{لا^{ل-۱}(۱-لا)^{م-۱}\ زلا}{(ص + س\,لا)^{ل+م}} = \frac{جیم(ل)\ جیم(م)}{جیم(ل + م)}\cdot\frac{۱}{ص^{م}\,(ص + س)^{ل}}$

(۲۶) ثابت کرو کہ $\text{کہ/۲ مع}\ \frac{جیب^{۲ل-۱}\,بر\ جب^{۲م-۱}\,بر\ زبر}{(ط\ جم^{۲}\,بر + ص\ جب^{۲}\,بر)^{ل+م}} = \frac{جیم(ل)\ جیم(م)}{۲\ جیم(ل + م)}\cdot\frac{۱}{ط^{ل}\ ص^{م}}$

(۲۷) ثابت کرو کہ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ $\frac{\text{ص}^{\text{ن}} \text{ جر زبر}}{\text{ط جم}^2\text{ بر} + \text{ص جب}^2\text{ بر}} = \frac{\text{ک}}{2 \text{ جم} \frac{1}{2}\text{ن ک}} \cdot \frac{1}{\text{ط}^{\frac{1-\text{ن}}{2}} \text{ ص}^{\frac{1+\text{ن}}{2}}}$

قائم بہ نسبت واحد کے ہے

(۲۸) ثابت کرو کہ $\int_0^{\text{ک}}$ $\frac{\text{جب}^{\text{ن}-1}\text{ بر زبر}}{(\text{س} + \text{صہ جم بر})^{\text{ن}}} = \frac{\left[\text{جیم}\left(\frac{\text{ن}}{2}\right)\right]^2}{\text{جیم}(\text{ن})} \cdot \frac{2^{\text{ن}-1}}{(\text{س}^2 - \text{صہ}^2)^{\frac{\text{ن}}{2}}}$

(۲۹) ثابت کرو کہ $\int_0^1 \frac{\text{لا}^{\text{ن}-1}\text{ زلا}}{(1 - \text{لا}^{\text{ن}})^{\frac{1}{\text{ن}}}} = \frac{\text{ک}}{\text{ن جب} \frac{\text{ک}}{\text{ن}}}$

(۳۰) ثابت کرو کہ $\int_0^1 \frac{\text{لا}^{\text{ن}-1}\text{ زلا}}{(1+\text{س لا})(1-\text{لا})^{\text{ن}}} = \frac{\text{ک}}{(1+\text{س})^{\text{ن}} \text{ جب ن ک}}$

(۳۱) ثابت کرو کہ $\int_0^{\infty} \frac{\text{جب ط لا جب}^2 \text{ س لا}}{\text{لا}}$ زلا = ۰ یا $\pm \frac{\text{ک}}{4}$ یا $\pm \frac{\text{ک}}{8}$ کے موافق

ی اور س کے قیمتوں کے

(۳۲) اس مساوات ی = $\int_0^{\infty} \frac{\text{جب بر جم زلا}}{\text{لا}}$ زبر کے مقام النقاط کو مرتسم کرو

(۳۳) مساوات $\frac{\text{ی}}{\text{ص}} = \int_0^{\text{ک}}$ لوگ $(1 - 2\text{ ی}^{\text{لو}}\text{ جم بر} + \text{ی}^{2\text{ لو}})$ زبر کا

مقام النقاط مرتسم کرو اور اسمین لو = جب $\frac{\text{لا}}{\text{ط}}$

(۳۴) مساوات ی = $\int_0^{\frac{\text{ک}}{2}} \frac{\text{لا جم بر زبر}}{\sqrt{(\text{لا}^2 + 2\text{ لا جب بر} + 1)}}$ کا مقام النقاط مرتسم کرو

اسمین جذر المربع کی علامت ہمیشہ ایسی لیجاتی ہے جسسے کہ نسب نما مثبت رہے

(۳۵) ثابت کرو کہ

$\int_0^{\frac{\text{ک}}{2}} \int_0^{\frac{\text{ک}}{2}}$ جب لا جب$^{-1}$ لا (جب لا جب ی) زلا زی = $\frac{\text{ک}^2}{4} - \frac{\text{ک}}{2}$

(۳۶) صورت $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty}$ جب ط لا ی$^{-\text{لا ی}}$ زلا زی کی کلیاں مختلف ترتیب سے

لیکر ماحصل کا اسمین مقابلہ کرو

(۳۷) قیمت $\int_0^{\infty}$ ی$^{-\frac{\text{لا}^2}{\text{ط}^2} - \frac{\text{ص}^2}{\text{لا}^2}}$ زلا کی دریافت کرو اور اسسے ثابت کرو کہ

$\int_0^{\infty} \left(\frac{\text{لا}^2}{\text{ط}^2} + \frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2}\right) \text{ی}^{-\frac{\text{لا}^2}{\text{ط}^2} - \frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2}}$ زلا $= \int_0^{\infty} \left(\frac{\text{لا}^2}{\text{ط}^2} - \frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2}\right) \text{ی}^{\frac{\text{لا}^2}{\text{ط}^2} - \frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2}}$ زلا $= \frac{5 \text{ ط} \sqrt{\text{ک}}}{4 \text{ ی}^2}$

(۳۸) ثابت کرو $\int \int \frac{\sqrt{(1 - \text{لا}^2 - \text{ی}^2)}}{\sqrt{(1 + \text{لا}^2 + \text{ی}^2)}}$ زلا زی = $\frac{\text{ک}}{4}\left(\frac{\text{ک}}{2} - 1\right)$

کلیاں تمام مثبت قیمتوں پر لا اور ی کی پھیلتی ہے جو لا^2 + ی^2 کو بڑا واحد سے بناتے ہین

(۳۹) ثابت کرو کہ

$$\text{مع مع مع} \ldots (۱ - \text{لا}^۲ - \text{ی}^۲ - \text{ے}^۲ \ldots)^{\frac{ن-۱}{۲}} \text{زلا زی زے} \ldots = \frac{\text{کہ}^{\frac{ن+۱}{۲}}}{۲^ن \text{جیم} \left[\frac{ن+۱}{۲}\right]}$$

تعداد مقادیر متغیر کی کیا ہی اور کلی اون تمام مثبت قیمتوں پر پھیلتی ہے جو

$$\text{لا}^۲ + \text{ی}^۲ + \text{ے}^۲ + \text{ے}^۲ + \ldots$$

کو بڑا واحد سے نہیں کرتے

(۴۰) اگر $ا_. + ا_۱ \text{لا} + ا_۲ \text{لا}^۲ + \ldots = ح (\text{لا})$

$$ط_. + ط_۱ + ط_۲ \text{لا}^۲ + \ldots = ح (\text{لا})$$

ثابت کرو کہ

$$ا_. ط_. + ا_۱ ط_۱ \text{لا}^۲ + ا_۲ ط_۲ \text{لا}^۴ + \ldots$$

$$= \frac{۱}{۲\text{کہ}} \text{کبمع} \left[ح (\text{لو}) + ح (\text{مو})\right]\left[ح (\text{لو}) + ح (\text{مو})\right] \text{زبر} - ا_. ط_.$$

اسمین $\text{لو} = \text{لا ی}^{س\sqrt{(-۱)}}$ اور $\text{مو} = \text{لا ی}^{-س\sqrt{(-۱)}}$

(۴۱) اگر مجموعہ سلسلہ $ط_. + ط_۱ \text{لا} + ط_۲ \text{لا}^۲ + \ldots$ کا صورت متناہی مین بیان ہو سکے تو مجموعہ سلسلہ $ط_.^۲ + ط_۱^۲ \text{لا}^۲ + ط_۲^۲ \text{لا}^۴ + \ldots$ کا کلی محدود مین تعبیر ہو سکتا ہے اسکو ثابت کرو اور پھر اوسے ثابت کرو کہ صورت مفصلہ $(۱ + \text{لا})^ن$ کی امثال ارقام کے مربعوں کا مجموعہ جب ن مثبت صحیح عدد ہو

$$\frac{۲^{ن+۲}}{\text{کہ}} \text{کبمع جم}^{ن} س \text{ جم}^۲ ن \text{ بر زبر} - ۱$$

سے بیان ہو سکتا ہے

(۴۲) ثابت کرو کہ $\text{کبمع} \frac{\text{جم س لا زلا}}{۱ + \text{لا}^۲} = \frac{\text{کہ}}{۲}\left[\frac{\text{ی}^س}{۱ + \text{ی}^س} + \frac{\text{ی}^{-س}}{۱ + \text{ی}^{-س}}\right]$

(۴۳) ثابت کرو کہ

$$\text{کہ مع مج (جب ۲ لا) جم لا زلا} = \text{کہ مع مج (جم}^۲ \text{ لا) جم لا زلا}$$

(۴۴) ثابت کرو کہ $۱ - \frac{\text{لا}^۲}{۲^۲} + \frac{\text{لا}^۴}{۲^۲ \times ۴^۲} - \ldots$

$$= \frac{۲}{\text{کہ}} \text{کبمع جم (لا جب ی) زی}$$

(۴۵) ثابت کرو کہ

$$\text{صصمع}\ \text{لا}^{م-۱}\ ی^{-\text{لا}^ن}\ \text{زلا}\ \text{صصمع}\ ی^{ن-م-۱}\ ی^{-ی^ن}\ \text{زی} = \frac{\text{کہ}}{ن^۲\ \text{جب}\ \frac{م\ \text{کہ}}{ن}}$$

دفعہ ۴۶ دیکہو اور مقدار متغیر کو لو سے بدلو جب کہ ی = لو لا

(۴۶) ثابت کرو کہ

$$\text{صصمع}\ ی^{-(\text{لا}^۲\text{جم}\ ۲\text{بر} + \frac{ط^۲}{\text{لا}^۲}\text{جب}\ ۲\text{بر})}\ \frac{\text{جم}}{\text{جب}} \left\{ \text{لا}^۲\text{جب}\ ۲\text{بر} + \frac{ط^۲}{\text{لا}^۲}\text{جم}\ ۲\text{بر} \right\} \text{زلا}$$

$$= \text{کہ}^{\frac{۱}{۲}}\ ی^{-ط}\ \frac{\text{جم}}{\text{جب}}\ (\text{سر}+ط)$$

برحدود غائی = کہہ کے درمیان داخل ہے

تیرھوان باب

علم مثلثی جملون کا پہلا نا

(۳۰۵) جس مطلب کا اب ہم ذکر کرینگے وہ علم حساب الکلیات کے استعمالات مین نہایت بکار اور عظیم الشان ہے اس اصول کے رسالہ مین وہ سارا تو نہین بیان ہو سکتا مگر اوسکا چربہ اتار دیتے ہین اور اس چربہ ہی سے طالب علمون کو بڑا فائدہ ہوگا کیونکہ اوسمین بہت سی نئی نئی ترکیبین کام مین اتی ہین اور بڑے بڑے نتیجے پیدا ہوتے ہین اگر اس مطلب کو پورا پورا دیکہنا منظور ہو تو پروفیسر دی مورگن صاحب کے علم حساب الکلیات کے رسالہ کو دیکہو

(۳۰۶) مطلوب یہہ ہے کہ م مقادیر مستقلہ ا۱ و ا۲ و ا۳ ۔ ۔ ام کی ایسی قیمتین دریافت کرین کہ صورت بیانیہ

$$ا_۱\ \text{جب}\ \text{لا} + ا_۲\ \text{جب}\ ۲\ \text{لا} + ا_۳\ \text{جب}\ ۳\ \text{لا} + \cdots + ا_م\ \text{جب}\ م\ \text{لا}$$

قیمت مین مطابق لا کے جملہ معین کے اوس حالت مین ہو کہ لا کی قیمتین بر و ۲ بر و ۳ بر ۔ ۔ م بر ہون اور اسمین $\text{بر} = \frac{ط}{م+۱}$ ہو

فرض کرو کہ ح (لا) جملہ معین لا کا ہو تو بموجب فرض کے م مساواتین جنسے مقادیر مستقلہ دریافت ہونگین یہہ حاصل ہونگین

ح (بر) = ا۱ جب بر + ا۲ جب ۲ بر + ا۳ جب ۳ بر + ۰۰ + ام جب م بر

ح (۲بر) = ا۱ جب ۲ بر + ا۲ جب ۴ بر + ا۳ جب ۶ بر + ۰۰ + ام جب ۲م بر

. . . .

ح (م بر) = ا۱ جب م بر + ا۲ جب ۲م بر + ا۳ جب ۳م بر + ۰۰ + ام جب م م بر

ان مساواتون مین سے اول مساوات کو جب لق بر مین اور دوسرے کو جب ۲ لق بر ۰۰ اور آخر مساوات کو جب م لق بر مین ضرب دو اور حاصل کو جمع کرو تو امثال اصو کے دوسرے طرف یہہ ہو نگے کہ

جب لق بر جب صو بر + جب ۲ لق بر جب ۲ صو بر + ۰۰۰۰۰ + جب م لق بر جب م صو بر

اب ہم یہہ ثابت کرینگے کہ یہہ امثال صفر ہے اگر صو مختلف لق سے ہو اور برابر ½ (م + ۱) ہے اگر صو برابر لق کے ہو

اول فرض کرو کہ صو مختلف لق سے ہی اب دوچند او پہر کے امثال کا برابر اس سلسلہ کے ہیگا

جم (لق - صو) بر + جم ۲ (لق - صو) بر + ۰۰۰ + جم م (لق - صو) بر

علم مثلث سے مجموعہ اول سلسلہ کا برابر ہے

جب (۲م + ۱) (لق - صو)/۲ - جب (لق - صو) بر/۲
―――――――――――――――
۲ جب (لق - صو) بر/۲

یعنی

جب [(لق - صو) کہ - (لق - صو) بر/۲] - جب (لق - صو) بر/۲
―――――――――――――――
۲ جب (لق - صو) بر/۲

یہہ صورت بیانیہ معدوم ہوتی ہی جب لق - صو طاق عدد ہو اور برابر - ا کے ہی جب لق - صو جفت عدد ہو

دوسرے سلسلہ کا مجموعہ اول سلسلہ کے مجموعہ سے اسطرح استخراج ہوتا ہے کہ علامت صو کی تبدیل کر دو اسسے معلوم ہوا کہ مجموعہ معدوم اوس حالت مین ہوتا ہیگا کہ لق + صو طاق عدد ہو اور - ا کی برابر اوس صورت مین ہوتا ہے کہ لق + صو جفت عدد ہو

پس صو جب مختلف لق سے تو امثال اصو کے صفر ہین

جب صو برابر لق کے ہے تو امثال یہہ ہو جا ئینگے کہ

جیب^2 لی بر + جیب^2 ۲ لی بر + ۰۰۰ + جیب^2 م لی بر

یعنی $\frac{م}{۲} - \frac{۱}{۲}$ [جم ۲ لی بر + جم ۴ لی بر + ۰۰۰ + جم ۲ م لی بر]

اب جس ترکیب کو ہم عمل مین لائی تہی اوسکے موافق معلوم ہوگا کہ سلسلہ جوب التمام کا مجموعہ ایجر اسلئی امثال اوس کے $\frac{۱}{۲}$ (م + ۱) ہین

اسسے یہہ حاصل ہوتا ہے

لی = $\frac{۲}{م+۱}$ [جیب لی بر ج (بر) + جیب ۲ لی بر ج (۲ بر) + ۰۰۰ + جیب م لی بر ج (م بر)]

پس اسی ہتک اعداد محتاج مین سی متواتر لی کے قیمتین مقرر کرنے سے مقادیر مستقلہ تشخیص ہوتی ہین

اب فرض کرو کہ م غیر محدود زیادہ ہوتا ہے تو ہم اخرکار

لی = $\frac{۲}{ط}$ کہ مع جیب لی مو ج (مو) زمو

اور چونکہ ج (لا) مطابق قیمت مین اس صورت بیانیہ

ا$_۱$ جیب لا + ا$_۲$ جیب ۲ لا + ۰۰۰ کے ہے

اور کہ کے درمیان لا کے غیر متناہی مساوی البعد قیمتون کے واسطے اس نتیجہ کو لکہ سکتی ہین کہ

ج (لا) = $\frac{۲}{ط}$ $\sum_{۱}^{\infty}$ مع جیب ن لا کہ مع جیب ن مو ج (مو) زمو

اسمین رمز $\sum_{۱}^{\infty}$ مع سے وہ تجمیع مراد ہے جو ن کے ہر یک مثبت قیمت کے مقرر کرنے سے حاصل ہوتا ہے

(۳۰۷) دفعہ گذشتہ کا مسئلہ اور اثبات دونو لاگرانژ کے ایجاد کئی ہوئی ہین ہم نے اس اثبات کو کچہہ تو اس نظر سے لکہا ہے کہ وہ اس علم کے تاریخ مین دلچسپ مضمون ہی اور کچہہ اس سبب کہ طلبہ کو اچہی ہدایتین اس مضمون کے باب مین ہوتی ہین اب ہم اثبات کی تحقیق بڑی تدقیق سے لکہینگے مگر طریقہ تحقیقات پوئسن کا اختیار کرینگے

(۳۰۸) علم مثلث کے معمولی طریقہ کے موافق یہہ صورت مفصلہ ہوسکتی ہے کہ

$$\frac{۱ - ھ^۲}{۱ - ۲ ھ جم \frac{ط (مو - لا)}{ب} + ھ^۲} = ۱ + ۲ ھ جم \frac{ط (مو - لا)}{ب}$$

$$+ ۲ ھ^۲ جم \frac{۲ ط (مو - لا)}{ب} + ۲ ھ^۳ جم \frac{۳ ط (مو - لا)}{ب} + ۰۰۰ \quad (۱)$$

ھ چہوٹا بہ نسبت واحد کے ہے اسلئی سلسلہ انضمامی ہے

(۱) کی طرفین کو مج (مو) میں ضرب دو اور بلحاظ مو کے کلی حدود غایی -ل اور ل کے درمیان لو

بائیں طرف مختلف قوای ھ کے اخر کو واحد بن جائینگے اور دائیں طرف جو کسرے اوسکا

شمار کنندہ اخر کو معدوم ہو جائیگا اور اسطرح کلی بہی معدوم ہو جائینگے اگر نسبتاً کبہی صفر نہ ہو

لیکن اگر لا درمیان -ل اور ل کے واقع ہو تو رقم جم $\frac{ک (مو - لا)}{ل}$ برابر واحد کے

کلی کے اندر ہوگی اور اسطرح نسب نما کسر کا $(۱ - ھ)^۲$ ہوگا اور صفر کی طرف مائل ہوگا

جب ھ قریب واحد کے پہونچیگا اسلئی کچہہ ضرور نہیں کہ کلی معدوم ہو اب ہم اوسکی قیمت تحقیق کرتے ہیں

فرض کرو کہ مو - لا = ے اور ھ = ۱ - ق تو

$$مع \frac{(۱ - ھ^۲) \, مج \, (مو) \, زمو}{۱ - ۲ ھ جم \frac{ک (مو - لا)}{ل} + ھ^۲} = مع \frac{ق (۱ + ھ) \, مج \, (لا + ے) \, زے}{ق^۲ + ۴ ھ جبا^۲ \frac{ک ے}{۲ ل}}$$

اب کلی کا صرف وہ حصہ بامعنی قیمت رکہتا ہے جو ے کے بہت چہوٹی مثبت یا منفی قیمتوں

سے پیدا ہوتا ہے پس ہم لکہ سکتے ہیں کہ

$$جب \frac{ک ے}{۲ ل} = \frac{ک ے}{۲ ل}$$

$$اور \; مج \, (لا + ے) = مج \, (لا)$$

اور کلی یہہ ہو جائینگے کہ

$$ق (۱ + ھ) \, مج \, (لا) \, مع \frac{زے}{ق^۲ + ھ \frac{ک^۲ ے^۲}{ل^۲}} = ۲ ق \, مج \, (لا) \, مع \frac{زے}{ق^۲ + \frac{ک^۲ ے^۲}{ل^۲}}$$

$$= \frac{۲ ل \, مج \, (لا)}{ک} \; مس^{-۱} \frac{ک ے}{ق ل}$$

فرض کرو کہ سہ اور -صہ حدود غایی ے کے ہوں تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{۲ ل \, مج \, (لا)}{ک} \left[مس^{-۱} \frac{ک سہ}{ق ل} + مس^{-۱} \frac{ک صہ}{ق ل} \right]$$

اسی معلوم ہوا کہ اخر کار جب ق کا معدوم ہونا فرض کیا جائیگا تو ۲ ل مج (لا) حاصل ہوگا پس اگر

لا درمیان -ل اور ل کے واقع ہو تو

$$مج \, (لا) = \frac{۱}{۲ ل} مع_{-ل}^{ل} \, مج \, (لو) \, زمو + \frac{۱}{ل} \, مع_{۱}^{\infty} \, مع_{-ل}^{ل} \, مج \, (مو) \, جم \frac{ن ک (مو - لا)}{ل} \, زمو \quad ...(۲)$$

لیکن اگر لا = ل یا -ل کے تو بائیں طرف کا وہی حصہ بامعنی ہے جو مو کو غیر محدود ل اور -ل کے قریب ہو پس ہم کو اوپر کا عمل دونو صورتوں میں کرنا چاہئے لیکن کلی بلحاظ ے کے پہلے صورت بر - صد سے - تک پہلتی ہی اور دوسری صورت میں سے سہ تک، اس سے معلوم ہوا کہ دائیں طرف ۲ ل مج (ل) کے ل مج (ل) + ل مج (-ل) رکھنا چاہئے اور اسواسطے بجائے مج (لا) کے دائیں طرف (۲) کے ہم کو

۱/۲ مج (ل) + ۱/۲ مج (-ل)

رکھنا چاہئے پس اسطرح سے ہم نے قیمت بائیں طرف کے رکن کی جب لا درمیان ل اور -ل کے واقع ہو تشخیص کریں اور صورتوں میں اوسکی قیمت ۳۲۱ کی طرح تشخیص ہوتی ہے

(۳۰۹) دفعہ ۳۰۸ میں جسطرح نتیجہ حاصل ہوا ہے اوسی طرح اگر ۰ اور ل کے درمیان کا لیں تو

مج (لا) = ۱/۲ل ل∫۰ مج (لو) زمو + ۱/ل ∞∑۱ مج (مو) جم ن کہ (مو - لا)/ل زمو ... (۱)

یہہ نتیجہ مستحکم رہیگا اگر لا کی قیمت ۰ اور ل کے درمیان ہو لیکن جب لا = ۰ تو دائیں طرف کا رکن ۱/۲ مج (۰) ہوگا اور جب لا = ل تو دائیں طرف کا رکن ۱/۲ مج (ل) ہوگا پس اسطرح قیمت بائیں طرف کے رکن کے جب لا درمیان ل اور -ل کے واقع ہو تشخیص کردی اور اوسکی اور صورتوں میں اوسطرح تشخیص ہوگی جسطرح دفعہ ۳۲۱ میں بیان ہوئی علے ہذا القیاس

۰ = ۱/۲ل ل∫۰ مج (مو) زمو + ۱/ل ∞∑۱ مج (مو) جم ن کہ (مو + لا)/ل زمو ... (۲)

یہہ نتیجہ لا کی سب قیمتوں کے واسطے جو ۰ اور ل کے درمیان واقع ہو مستحکم ہی اور دائیں طرف رکن ۱/۲ مج (۰) ہونا چاہئے اور جب لا = ل تو دائیں طرف کا رکن ۱/۲ مج (ل) ہونا چاہئے

(۱) اور (۲) کے جمع کرنے سے

مج (لا) = ۱/ل ل∫۰ مج (لو) زمو + ۲/ل ∞∑۱ جم ن کہ لا/ل ل∫۰ جم ن کہ مو/ل مج (مو) زمو ... (۳)

۰ اور ل کے درمیان جو قیمتیں لا کے ہوں اونکے موافق یہہ نتیجہ مستحکم ہے

(۱) اور (۲) میں تفریق کرنے سے

$$\text{مج}(\text{لا}) = \frac{۲}{\text{ل}} \sum_{۱}^{\infty} \text{جب} \frac{\text{ں کہ لا}}{\text{ل}} \int_{۰}^{\text{ل}} \text{جب} \frac{\text{ں کہ مو}}{\text{ل}} \,\text{مج}(\text{مو})\, \text{زمو} \quad (۴)$$

۰ اور ل کے درمیان لا کے سب قیمتوں کے موافق یہہ نتیجہ مستحکم ہے اور جب لا = ۰ تو دائیں طرف کا رکن صفر ہونا چاہیے

مساوات (۴) بالکل مطابق لاگرانژ کے صورت قانونیہ کے ہے

صورت قانونیہ (۳) اور (۴) اور صورتوں سی مستنبط ہو سکتی ہیں فرض کرو کہ ہم (۳) لیں اور جب $\frac{\text{کہ لا}}{\text{ل}}$ مج (لا) کو بجای مج (لا) کے لکھیں تو

$$\text{جب} \frac{\text{کہ لا}}{\text{ل}} \,\text{مج}(\text{لا}) = \frac{۱}{\text{ل}} \int_{۰}^{\text{ل}} \text{جب} \frac{\text{کہ مو}}{\text{ل}} \,\text{مج}(\text{مو})\, \text{زمو}$$

$$+ \frac{۲}{\text{ل}} \sum_{۱}^{\infty} \text{جم} \frac{\text{ں کہ لا}}{\text{ل}} \int_{۰}^{\text{ل}} \text{جم} \frac{\text{ں کہ مو}}{\text{ل}} \,\text{جب} \frac{\text{کہ مو}}{\text{ل}} \,\text{مج}(\text{مو})\, \text{زمو}$$

اب $\text{جم} \frac{\text{ں کہ مو}}{\text{ل}} \,\text{جب} \frac{\text{کہ مو}}{\text{ل}} = \frac{۱}{۲} \text{جب} \frac{(\text{ں}+۱)\,\text{کہ مو}}{\text{ل}} - \frac{۱}{۲} \text{جب} \frac{(\text{ں}-۱)\,\text{کہ مو}}{\text{ل}}$

اسواسطے یہہ دریافت ہوگا کہ نتیجہ کو اسطرح بھی کر دکھا سکتے ہیں کہ

$$\text{جب} \frac{\text{کہ لا}}{\text{ل}} \,\text{مج}(\text{لا})$$

$$= \frac{۱}{\text{ل}} \sum_{۱}^{\infty} \left[\text{جم} \frac{(\text{ں}-۱)\,\text{کہ لا}}{\text{ل}} - \text{جم} \frac{(\text{ں}+۱)\,\text{کہ لا}}{\text{ل}}\right] \int_{۰}^{\text{ل}} \text{جب} \frac{\text{ں کہ مو}}{\text{ل}} \,\text{مج}(\text{مو})\, \text{زمو}$$

لیکن

اور نیز $\text{جم} \frac{(\text{ں}-۱)\,\text{کہ لا}}{\text{ل}} - \text{جم} \frac{(\text{ں}+۱)\,\text{کہ لا}}{\text{ل}} = ۲\,\text{جب} \frac{\text{ں کہ لا}}{\text{ل}} \,\text{جب} \frac{\text{کہ لا}}{\text{ل}}$

اور اسواسطے جب $\frac{\text{کہ لا}}{\text{ل}}$ پر تقسیم کرنے سے ہم صورت قانونیہ (۴) کو حاصل کرینگے

اب ہم بعض مثالیں لکھتے ہیں

(۳۱۰) لا کو سلسلہ جب میں پہیلاؤ صورت قانونیہ (۴) دفعہ ۳۰۹ کی لو اور فرض کرو کہ ل = کہ تو

$$\int_{۰}^{\text{کہ}} \text{لو جب ں مو زلو} = -\frac{\text{مو جم ں لو}}{\text{ں}} + \frac{\text{جب ں مو}}{\text{ں}^{۲}}$$

اسواسطے $\int_{۰}^{\text{کہ}}$ مو جب ں مو زمو = $\frac{\text{کہ}}{\text{ں}}$ اگر ں طاق ہو اور $-\frac{\text{کہ}}{\text{ں}}$ ہے اگر ں جفت ہو

پس

لا = ۲ [جب لا - ½ جب ۲ لا + ⅓ جب ۳ لا - ¼ جب ۴ لا + ...]

اور کہ کے درمیان لا کے سب قیمتون کے موافق یہہ نتیجہ مستحکم ہے اور طرفین لا کے ساتھہ معدوم ہوجاتی ہین اسواسطی نتیجہ اوس حالت مین بہی مستحکم ہوگا جسوقت کہ لا = ۰ اور یہہ بہی ظاہر ہے کہ اگر یہہ نتیجہ لا کے کسی مثبت قیمت کے موافق مستحکم ہو تو وہ اوس منفی قیمت کے واسطے بہی مستحکم ہوگا جو اوس مثبت قیمت کے مناظر ہو اسی معلوم ہوا کہ - کہ اور کہ کے درمیان لا کے سب قیمتون کے موافق نتیجہ مستحکم ہے اور اسمین یہہ حد بنانی والی قیمتین بہی خارج ہین

(۳۱۱) جم لا کو سلسلہ جوب مین پہیلاؤ صورت قانونیہ (۴) دفعہ ۳۰۹ لو اور فرض کرو کہ ل = کہ تو

مع جم مو جب ن مو زمو = ½ مع [جب (ن + ۱) مو + جب (ل - ۱) مو] زمو

= - ½ [جم (ن + ۱) مو / (ل + ۱) + جم (ل - ۱) مو / (ل - ۱)]

اسواسطے کہ مع جم مو جب ن مو زمو = ۰ اگر ن طاق ہو

= ۲ن / (ن² - ۱) اگر ن جفت ہو

اسواسطے

جم لا = ۲/کہ [۲/۳ جب ۲ لا + ۸/۱۵ جب ۴ لا + ... + (۱ + (-۱)ن) / (ن² - ۱) ن جب ن لا + ...]

لا = ۰ سے لا = کہ تک یہہ نتیجہ مستحکم ہے اور یہہ حد بنانی والی قیمتین خارج ہین

(۳۱۲) ایک مقدار مستقل کو جوب کے سلسلہ مین پہیلاؤ مقدار مستقل کو س سے تعبیر کرو تو س کو بجای مج (مو) کے صورت قانونیہ (۴) دفعہ ۳۰۹ مین رکہو اور ل = کہ کے فرض کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

س = $\frac{4}{\pi}$ [جب لا + $\frac{1}{3}$ جب ۳لا + $\frac{1}{5}$ جب ۵لا + ۰۰۰]

س پر تقسیم کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے

$\frac{\pi}{4}$ = جب لا + $\frac{1}{3}$ جب ۳لا + $\frac{1}{5}$ جب ۵لا + ۰۰۰

لا = ۰ سے لا = ط تک یہہ نتیجہ مستحکم ہے اور یہہ حد بنانی والی قیمتیں خارج ہیں

اگر $\frac{\pi}{2}$ - ء کو بجای لا کے لکھو تو ذیل کی صورت قانونیہ حاصل ہو گی جو

ء = - $\frac{\pi}{2}$ سے ء = $\frac{\pi}{2}$ تک مستحکم ہو گی اور قیمتیں حد بنانی والی خارج ہیں

$\frac{\pi}{4}$ = جم ء - $\frac{1}{3}$ جم ۳ء + $\frac{1}{5}$ جم ۵ء - ۰۰۰

(۳۱۳) لا کو سلسلہ جیب التمام میں پھیلاؤ

دفعہ ۳۰۹ کی صورت قانونیہ (۳) لو اور فرض کرو کہ ل = ط تو

مع سو جم ن سو ز سو = $\frac{\text{سو جب ن سو}}{\text{ن}}$ + $\frac{\text{جم ن سو}}{\text{ن}^2}$

اسواسطے کہ مع سو جم ن سو ز سو = ۰ اگر ن جفت ہو اور - $\frac{2}{\text{ن}^2}$ کے اگر ن طاق ہو اور

کہ مع سو ز سو = $\frac{\pi^2}{2}$

پس لا = $\frac{\pi}{2}$ - $\frac{4}{\pi}$ [جم لا + $\frac{1}{3^2}$ جم ۳لا + $\frac{1}{5^2}$ جم ۵لا + ۰۰۰]

یہہ نتیجہ لا = ۰ سے لا = ط تک مستحکم ہے

اگر لا = $\frac{\pi}{2}$ - ء کے رکھیں تو صورت قانونیہ ذیل حاصل ہو گی اور - $\frac{\pi}{2}$ اور $\frac{\pi}{2}$ کے

درمیان ء کے ہر قیمت کے موافق مستحکم ہو گی اور یہہ حد بنانی والی قیمتیں بھی اسمیں داخل ہیں

ء = $\frac{4}{\pi}$ [جب ء - $\frac{1}{3^2}$ جب ۳ء + $\frac{1}{5^2}$ جب ۵ء - ۰۰]

(۳۱۴) یٔ^لا کو سلسلہ جیوب میں پھیلاؤ

تو ہم کو یہہ حاصل ہو گا

یٔ^{ط لا} = $\frac{2}{\pi}$ مج$_1^\infty$ $\frac{\text{ن}}{\text{ن}^2 + \text{ط}^2}$ (۱ - جم ن ط یٔ^{ط ط}) جب ن لا

لا = ۰ سے لا = ط تک یہہ نتیجہ مستحکم ہے اور حد بنانی والی دونو قیمتیں خارج ہیں

(۳۱۵) $\text{یٰ}^{\text{طلا}}$ کو سلسلہ جوب التمام میں پھیلاؤ

تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{یٰ}^{\text{طلا}} = \frac{\text{یٰ}^{\text{طکہ}} - ۱}{\text{طکہ}} + \frac{۲\text{ط}}{\text{کہ}} \sum \frac{\text{جم ن کہ یٰ}^{\text{طلا}} - ۱}{\text{ط}^۲ + \text{ن}^۲} \text{ جم ن لا}$$

لا = ۰ سے لا = کہ تک یہہ نتیجہ مستحکم ہے

(۳۱۶) جب ط لا کو جوب کے سلسلہ میں پھیلاؤ اور ط کوئی صحیح عدد نہیں ہے

ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\text{کہ}}{۲} \cdot \frac{\text{جب طلا}}{\text{جب طکہ}} = \frac{\text{جب لا}}{۱^۲ - \text{ط}^۲} - \frac{۲ \text{ جب ۲لا}}{۲^۲ - \text{ط}^۲} + \frac{۳ \text{ جب ۳لا}}{۳^۲ - \text{ط}^۲} - \cdots$$

لا = ۰ سے لا = کہ تک یہہ نتیجہ مستحکم ہی اول حد بنانی والی قیمت داخل اور دوسرے خارج ہے

(۳۱۷) جم ط لا کو سلسلہ جوب التمام میں بیان کرو اور ط کوئی صحیح عدد نہیں ہے

ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\text{کہ}}{۲} \cdot \frac{\text{جم طلا}}{\text{جب طکہ}} = \frac{۱}{۲\text{ط}} - \frac{\text{ط جم لا}}{\text{ط}^۲ - ۱^۲} + \frac{\text{ط جم ۲لا}}{\text{ط}^۲ - ۲^۲} - \cdots$$

یہہ نتیجہ لا = ۰ سے لا = کہ تک مستحکم ہے اور دونو داخل ہیں

(۳۱۸) $\text{یٰ}^{\text{طلا}} - \text{یٰ}^{-\text{طلا}}$ کو سلسلہ جوب میں پھیلاؤ

یہاں $\text{کہ مع} \left(\text{یٰ}^{\text{طو}} - \text{یٰ}^{-\text{طو}}\right) \text{جب ن و ز لو} = \frac{\text{ن} \left(\text{یٰ}^{\text{طکہ}} - \text{یٰ}^{-\text{طکہ}}\right)}{\text{ط}^۲ + \text{ن}^۲} \text{ جم ن کہ}$

اسواسطے

$$\frac{\text{کہ}}{۲} \cdot \frac{\text{یٰ}^{\text{طلا}} - \text{یٰ}^{-\text{طلا}}}{\text{یٰ}^{\text{طکہ}} - \text{یٰ}^{-\text{طکہ}}} = \frac{\text{جب لا}}{۱^۲ + \text{ط}^۲} - \frac{۲ \text{ جب ۲لا}}{۱^۲ + \text{ط}^۲} + \frac{۲ \text{ جب ۲لا}}{۳^۲ + \text{ط}^۲} - \frac{۳ \text{ جب ۳لا}}{۳^۲ + \text{ط}^۲} - \cdots$$

(۳۱۹) $\left(\text{یٰ}^{\text{ط(کہ-لا)}} + \text{یٰ}^{-\text{ط(کہ-لا)}}\right)$ کو سلسلہ جوب التمام میں پھیلاؤ

یہاں $\text{کہ مع} \left\{\text{یٰ}^{\text{ط(کہ-و)}} + \text{یٰ}^{-\text{ط(کہ-و)}}\right\} \text{جم ن و ز لو} = \frac{\text{ط} \left(\text{یٰ}^{\text{طکہ}} - \text{یٰ}^{-\text{طکہ}}\right)}{\text{ط}^۲ + \text{ن}^۲}$

اور $\text{کہ مع} \left\{\text{یٰ}^{\text{ط(کہ-لا)}} + \text{یٰ}^{-\text{ط(کہ-لا)}}\right\} \text{ز لو} = \frac{\text{یٰ}^{\text{طکہ}} - \text{یٰ}^{-\text{طکہ}}}{\text{ط}}$

اسواسطے

$$\frac{\text{کہ}}{۲\text{ط}} \cdot \frac{\text{یٰ}^{\text{ط(کہ-لا)}} + \text{یٰ}^{-\text{ط(کہ-لا)}}}{\text{یٰ}^{\text{طکہ}} - \text{یٰ}^{-\text{طکہ}}} = \frac{۱}{۲\text{ط}^۲} + \frac{\text{جم لا}}{۱^۲ + \text{ط}^۲} + \frac{\text{جم ۲لا}}{۲^۲ + \text{ط}^۲} + \cdots$$

(۳۲۰) اس بات کو بھی جاننا چاہی کہ جو او پر صور قانونیہ لکھی ہیں او سے اور صور قانونیہ کا استنباط

کلی لیتی ہے ہو سکتا ہے اور علی العموم اسطرح جو سلسلے حاصل ہوتے ہیں وہ
جن اصل سلسلوں سے مستنبط ہوتی ہیں اونسے بہت جلد التضامی ہو جاتے ہیں
مثلاً ہم لا کی صورت قانونیہ سلسلہ جوب میں لو جو دفعہ ۳۱۱ لکھی ہے اور کلی لوتو

$$\frac{\text{ک}}{\text{ہ}} \text{ جب } لا = \text{مقدار مستقل} - \frac{\text{جم ۲ لا}}{۳ \times ۱} - \frac{\text{جم ۴ لا}}{۵ \times ۳} - \frac{\text{جم ۶ لا}}{۷ \times ۵} - \ldots$$

لا = ۰ کے رکھنے سے مقدار مستقل $\frac{۱}{۲}$ معلوم ہو گی یہہ نتیجہ مطابق اوس نتیجہ کے ہے
جو جب لا کو سلسلہ جوب التمام میں پھیلانے سے حاصل ہوتا

(۳۲۱) ہم اوپر ثابت کر آئے ہیں کہ دفعہ ۳۰۹ کی صورت قانونیہ (۳) اون سب قیمتوں
پر حاوی ہے جو لا کے - اور ل کے قیمتوں کے درمیان لی جائیں اور - اور ل خود بھی شامل ہیں تو اب
اس بات کا دریافت کر لینا کچھ مشکل نہیں کہ بائیں طرف کا رکن ان لا کے حدود غائی کے پرے
کسلئے برابر ہوتا ہے، فرض کرو کہ لا مثبت ہے اور ل اور ۲ ل کے درمیان واقع ہے اور
لا = ۲ ل - لاَ ایسا رکھو کہ لاَ چھوٹا بہ نسبت ل کے ہو تو

$$\text{جم } \frac{\text{ن کہ لا}}{\text{ل}} = \text{جم } (۲ \text{ ن کہ} - \frac{\text{ن کہ لاَ}}{\text{ل}}) = \text{م } \frac{\text{ن کہ لاَ}}{\text{ل}}$$

اسواسطے قیمت بائیں طرف کے رکن کی مج (لاَ) ہے دوم فرض کرو کہ لا بڑا بہ نسبت ۲ ل کے ہے
اور وہ برابر ۲ م لا + لاَ کے ہے جسمیں لاَ چھوٹا ۲ ل سے ہے تو

$$\text{جم } \frac{\text{ن کہ لا}}{\text{ل}} = \text{جم } \frac{\text{ن کہ لاَ}}{\text{ل}}$$

پس قیمت وہی رہی گویا کہ لاَ کو بجائے لا کے رکھا ہی نہ تھا یعنی قیمت مج (لاَ) ہے اگر
لاَ چھوٹا ل سے ہو اور مج (۲ ل - لاَ) ہے اگر لاَ بڑا ل سے ہو
یہہ ظاہر ہے کہ لا کے ہر منفی قیمت کے موافق وہی قیمت رہی گی جو اوسکی نظر کی مثبت قیمت
کے واسطے ہے اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر لا مثبت ہو اور = ۲ م ل + لاَ تو قیمت بائیں طرف مساوی
(۴) دفعہ ۳۰۹ کی وہی ہے جو لاَ کو بجائے لا کے رکھنے سے حاصل ہوتی اور مج (لاَ) ہے اگر
لاَ چھوٹا ل سے ہو اور - مج (۲ ل - لاَ) ہے اگر لاَ بڑا ل سے ہو اور لا کے ہر منفی قیمت

کے موافق وہی قیمت ہی جو عددی قیمت اوسکی نظیر کی مثبت قیمت ہی مگر علامت بدلی ہوی

(۳۲۲) اس بات پر بہی دہیان کرنا چاہی کہ دفعہ ۳۰۸ کے اصولی استدلال مین ہم نے یہہ فرض لیا ہے کہ جب صہ اپنی حد غائی واحد پر پہونچتا ہے تو صورت بیانیہ

مع صہ^ن مج (مو) جم $\frac{\text{ن کہ (مو - لا)}}{\text{ل}}$ زمو

قایم مقام

مع مج (مو) جم $\frac{\text{ن کہ (مو - لا)}}{\text{ل}}$ زمو

کا ہوسکتا ہے خواہ ن کتنا ہی بڑا ہو اب ہم یہہ ثابت کرکے کہ دوسری کلی جب ن غیر محدود زیادہ ہو معدوم ہوتا ہے یہہ بتلائینگے کہ اوپر جو بات فرض کی ہے اوسی کوئی غلطی نہین پیدا ہوئے ہمکو یہہ حاصل ہے کہ

مع مج (مو) جم $\frac{\text{ن کہ (مو - لا)}}{\text{ل}}$ زمو = $\frac{\text{ل مج (مو)}}{\text{کہ ن}}$ جب $\frac{\text{ن کہ (مو - لا)}}{\text{ل}}$

− $\frac{\text{ل}}{\text{کہ ن}}$ مع مجَ (مو) جب $\frac{\text{ن کہ (مو - لا)}}{\text{ل}}$ زمو

اسسے ثابت ہوتا ہے کہ دائین طرف کی کلی معدوم ہوتی ہی جب ن غیر متناہی ہو اور قاعدہ یہہ ہے کہ

مع (مو) غیر متناہی نہ ہو

(۳۲۳) دفعہ ۳۰۹ کی صورقانونیہ (۳) اور (۴) سے متعلق بڑی بڑی باتین اب تک ہمنے نہین بیان کین ان صورقانونیہ مین کچہ ضرور نہین ہی کہ مج (لا) پیوستہ جملہ ہو مثلاً لا = ۔ سے لا = ط تک یہہ حاصل ہوسکتا ہی کہ

مج (لا) = ح₁ (لا) تو لا = ط سے لا = ص تک یہہ حاصل ہوسکتا ہے کہ

مج (لا) = ح₂ (لا) تو لا = ص سے لا = س تک یہہ حاصل ہوسکتا ہے کہ

مج (لا) = ح₃ (لا) تو لا = س سے لا = ل تک یہہ حاصل ہوسکتا ہے کہ

مج (لا) = مج₄ (لا)

مثلاً لا کے تمام قیمتوں کے واسطے جو ۔ اور ل کے درمیان واقع ہوں اور جنمین ۔ اور ل بہی داخل ہوں صورت قانونیہ (۳) پہر بہی صادق آتی ہی بگروہ قیمتیں مستثنے ہین جنکی ہونگی ہیت

کے اندر گسستگی واقع ہوتی ہیں مثلاً لا = ط تو قیمت بائیں طرف کے رکن کی
ح۱ (ط) یا ح۲ (ط) نہیں ہوگی بلکہ ½ [ح۱ (ط) + ح۲ (ط)] ہوگی اسواسطے اگر
لا = ط کے جگہہ ح۱ (لا) = ح۲ (لا) رکھیں تو صورت قانونیہ اوس حالت مین
بھی مستحکم ہوگی جب کہ لا = ط

بعض مصنفین نے دفعہ ۳۰۹ کی صورت قانونیہ (۳) کی بیان کرنے کا ایک ایسا طریقہ اختیار کیا ہے
جسمیں توجہ امکان گسستگی کی طرف ہوتی ہی دائیں طرف مین بجائے مج (لا) کے
½ [مج (لا + بد) + مج (لا − بد)] رکھتے ہیں اسمین بد بھی غیر محدود چھوٹی نسبت مقدار
کو تعبیر کرتی ہے پس جب گسستگی نہیں ہوتی تو حد غائی مج (لا + بد) کی مج (لا) ہوتی ہے
اور نیز ایسی ہی حد غائی مج (لا − بد) ہے لیکن فرض کرو کہ جب لا = ط ہو تو وہی گسستگی واقع
ہوتی ہی جو اوپر بیان ہوئی تو حد غائی مج (ط + بد) کی ح۱ (لا) ہے

(۳۲۴) ایسی صورت بیانیہ حاصل کرو کہ جو برابر س کے اوس حالت میں ہو کہ لا درمیان ۰ اور ط کے واقع ہو اور برابر صفر کے اوس حال میں ہو کہ لا درمیان ط اور ل کے واقع ہو
صورت قانونیہ (۳) دفعہ ۳۰۹ کی ہو یہاں مو = ۰ سے مو = ط تک

مج (مو) = س اور مو = ط سے مو = ل تک وہ صفر ہے پس

$$\int_{0}^{\text{ل}} \text{جم}\,\frac{\text{ن ک مو}}{\text{ل}}\ \text{مج (مو) ز مو}$$ کی صورت یہہ ہوجائیگی کہ

$$\text{س}\int_{0}^{\text{ط}} \text{جم}\,\frac{\text{ن ک مو}}{\text{ل}}\ \text{ز مو} = \frac{\text{س ل}}{\text{ن ک}}\ \text{جب}\,\frac{\text{ن ک ط}}{\text{ل}}$$

اسواسطے صورت بیانیہ مطلوب

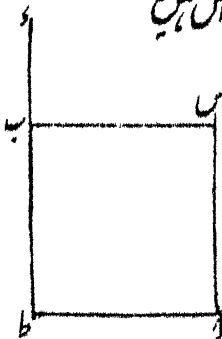
$$\frac{\text{س ط}}{\text{ل}} + \frac{\text{۲ س}}{\text{ک}}\Big[\text{جب}\,\frac{\text{ک ط}}{\text{ل}}\ \text{جم}\,\frac{\text{ک لا}}{\text{ل}} + \frac{1}{2}\,\text{جب}\,\frac{\text{۲ ک ط}}{\text{ل}}\ \text{جم}\,\frac{\text{۲ ک لا}}{\text{ل}} + \frac{1}{3}\,\text{جب}\,\frac{\text{۳ ک ط}}{\text{ل}}\ \text{جم}\,\frac{\text{۳ ک لا}}{\text{ل}} + \dots\Big]$$

اسے ½ س معلوم جب ہوگا کہ لا = ط

یا دفعہ ۳۰۹ کے صورت قانونیہ (۴) کو اس طرح کام میں لائیں کہ

ایک اور مثال یہہ ہے کہ ارقام جو ب مین جملہ مج (لا) ایسا دریافت کرو
جو برابر لا کی لا = ۰ سے لا = سہ تک ہو اور پھر برابر سہ کی لا = سہ سے لا = کہ ـ سہ تک ہو
اور پھر برابر کہ ـ لا کی لا = کہ ـ سہ سے لا = کہ تک ہو
حصل یہہ ہے کہ

مج (لا) = ۴/کہ {جب سہ جب لا + ۱/۳۲ جب ۳ سہ جب ۳ لا + ۱/۵۲ جب ۵ سہ جب ۵ لا + }

لا = ۰ سے لا = کہ تک یہہ صحیح ہے اٰمین ۰ اور کہ بھی داخل ہین
اس نتیجے کے معنی علم ہندسہ کے موافق بیان کرتے ہین
فرض کرو کہ ط ا س ب ایک مربع ایسا ہو کہ
ط ا = کہ اور ط ب = کہ مبدء ط کو
اور ط ا کو محور لا کا اور ط ب کو محور ی کا
اور محورے کو زاویہ قائمہ بناتا ہوا محور لا اور ی پر مقرر کرو اگر ایک مخروط بنایا جاے
جسکا قاعدہ ط ا س ب ہو اور اوسکا راس نقطہ لا = کہ/۲ اور ی = کہ/۲ اور ے = کہ/۲ ہو
تو ذیل کی مساوات سے مخروط کے وہ چارون رخ تعبیر ہونگے جو راس پر ملتی ہین

ے = ۴/کہ [جب لا جب ی + ۱/۳۲ جب ۳ لا جب ۳ ی + ۱/۵۲ جب ۵ لا جب ۵ ی + ۰۰۰]

طالب علم ان مثالون کو ثابت کرین کہ
اگر لا تعداد اچھو طیا ط سے ہو تو صورت بیانیہ کی لا

ش ط/کہ مج [جم (۲ن + ۱) کہ لا/ط۲ ÷ (۲ن + ۱)۲]

برابر ط ـ لا کے اگر لا مثبت ہو اور ط + لا کے اگر لا منفی ہو
ثابت کرو کہ لا کی قیمتین جو درمیان ـ کہ اور کہ کے واقع ہون اور کہ اور ـ کہ بھی داخل ہون

لا۲/۴ = کہ۲/۱۲ ـ جم لا + جم ۲ لا/۲۲ ـ جم ۳ لا/۳۲ + ۰ ۰ ۰

یہہ دفعہ ۳۱۰ سے کلی کے لینے سے حاصل ہو سکتا ہے یا دفعہ ۳۰۹ کی مساوات (۳) سے

اس نتیجہ کی کلی لو تو

$$\frac{\text{لا}^3}{۱۲} - \frac{\text{کہ}^2\,\text{لا}}{۱۲} = -\,\text{جب لا} + \frac{\text{جب ۲لا}}{۲^3} - \frac{\text{جب ۳لا}}{۳^3} + \cdots$$

جوب کی ارقام میں صورت بیانیہ دریافت کرو جو برابر جب $\frac{\text{کہ لا}}{\text{سہ}}$ کے لا = ۰ سے لا = سہ تک ہو اور برابر ۰ کی لا = سہ سے لا = کہ تک ہو ماحصل یہہ ہے کہ

$$۴\,\text{سہ}\left[\frac{\text{جب سہ جب لا}}{\text{کہ}^2 - \text{سہ}^2} + \frac{\text{جب ۲ سہ جب ۲لا}}{\text{کہ}^2 - ۲^2\,\text{سہ}^2} + \frac{\text{جب ۳ سہ جب ۳لا}}{\text{کہ}^2 - ۳^2\,\text{سہ}^2} + \cdots\right]$$

ارقام جوب التمام میں صورت بیانیہ ایسی دریافت کرو کہ وہ برابر $\frac{\text{کہ}^2}{۴} - \text{لا}^2$ کی لا = ۰ سے لا = $\frac{\text{کہ}}{۲}$ تک ہو اور برابر ۰ کی لا = $\frac{\text{کہ}}{۲}$ سے لا = کہ تک ہو نتیجہ یہہ ہے کہ

$$\frac{\text{کہ}^2}{۱۲} + \frac{۴}{\text{کہ}}\left[\text{جم لا} - \frac{\text{جم ۳لا}}{۳^3} + \frac{\text{جم ۵لا}}{۵^3} - \cdots\right]$$
$$+\,۲\left[\frac{\text{جم ۲لا}}{۲^2} - \frac{\text{جم ۴لا}}{۴^2} + \frac{\text{جم ۶لا}}{۶^2} - \cdots\right]$$

(۳۲۶) دفعہ ۳۰۹ کے متماثل اور صورتا نونیہ بھی نکل سکتی ہیں اونمیں بعض کی تحقیقات ہم بیان کرتے ہیں دفعہ ۳۰۹ سے ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

$$\text{مج(لا)} = \frac{۱}{۲\text{ل}}\int_{۰}^{\text{ل}}\text{مج(مو) زمو} + \frac{۱}{\text{ل}}\sum_{۱}^{\infty}\int_{۰}^{\text{ل}}\text{مج(مو) جم}\,\frac{\text{ن کہ(مو} - \text{لا)}}{\text{ل}}\,\text{زمو} \cdots (۱)$$

یہہ اون سب حالتوں میں مستحکم ہی جنمیں لا کی قیمت ۰ اور ل کے درمیان واقع ہو لیکن جب لا = ۰ تو دائیں طرف کا رکن $\frac{۱}{۲}$ مج (۰) ہو جائیگا اور جب لا = ل تو دائیں طرف کا رکن $\frac{۱}{۲}$ مج (ل) ہو جائیگا اور جسطرح یہہ نتیجہ حاصل کیا ہے اوسطرح ہم یہہ ثابت کرسکتے ہیں کہ

$$۲\,\text{مج(لا)} = \frac{۱}{۲\text{ل}}\int_{۰}^{\text{ل}}\text{مج(مو) زمو} + \frac{۱}{\text{ل}}\sum_{۱}^{\infty}\int_{۰}^{\text{ل}}\text{مج(مو) جم}\,\frac{\text{ن کہ(مو} - \text{لا)}}{۲\text{ل}}\,\text{زمو} \cdots (۲)$$

۰ اور ل کے درمیان کوئی قیمت لا کے واقع ہو اون سب کے لئی یہہ نتیجہ مستحکم ہی لیکن جب لا = ۰ تو دائیں طرف کا رکن مج (۰) ہو جائیگا اور جب لا = ل تو دائیں طرف کا مج (ل) ہو جائیگا

(۱) کو (۲) سے تفریق کرو تو

$$\text{مج(لا)} = \frac{۱}{\text{ل}}\sum_{۱}^{\infty}\int_{۰}^{\text{ل}}\text{مج(مو) جم}\,\frac{\text{(۲ن} - ۱\text{) کہ(مو} - \text{لا)}}{۲\,\text{ل}}\,\text{زمو} \cdots (۳)$$

یہہ مستحکم اون سب حالتوں میں ہی جنمیں لا کوئی قیمت ۰ اور ل کے درمیان رکھتا ہی لیکن جب لا = ۰

تو دائیں طرف کا رکن $\frac{1}{2}$ مج (۰) ہونا چاہیے اور جب لا = ل تو دائیں طرف کا رکن $\frac{1}{2}$ مج (ل) ہوگا
اب جسطرح (۳) حاصل ہوا تہا اوسطرح نتیجہ ذیل حاصل کر سکتے ہیں مو + لا سے بجای مو - لا کے ہم جلیں

$$\frac{1}{ل} \int_0^ل مج (مو) جم \frac{(۲ ن - ۱) کہ (مو + لا)}{۲ ل} ز مو \ldots (۴)$$

یہہ مستحکم اون سب حالتون میں ہی جنمیں لا کی کوئی قیمت ۰ اور ل کے درمیان ہو لیکن جب لا = ۰ تو
دائیں طرف کا رکن $\frac{1}{2}$ مج (۰) ہوگا اور جب لا = ل تو دائیں طرف کا رکن $-\frac{1}{2}$ مج (ل) ہوگا

(۳) اور (۴) کی جمع اور تفریق کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$مج (لا) = \frac{۲}{ل} \sum_1^\infty جم \frac{(۲ ن - ۱) کہ لا}{۲ ل} \int_0^ل مج (مو) جم \frac{(۲ ن - ۱) کہ مو}{۲ ل} ز مو \ (۵)$$

$$مج (لا) = \frac{۲}{ل} \sum_1^\infty جب \frac{(۲ ن - ۱) کہ لا}{۲ ل} \int_0^ل مج (لو) جب \frac{(۲ ن - ۱) کہ مو}{۲ ل} ز مو \ (۶)$$

یہہ نتایج مستحکم اون سب حالتون میں ہیں جنمیں لا کی کوئی قیمت ۰ اور ل کے درمیان لیجاے
لیکن جب لا = ۰ تو دائیں طرف کا رکن (۶) کا صفر ہوگا اور جب لا = ل تو دائیں طرف
کا رکن (۵) کا ہوگا

(۶) کی مثال ذیل میں لکھی جاتی ہے ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

$$\frac{کہ لا}{۸} = جب \frac{لا}{۲} - \frac{1}{۳^2} جب \frac{۳ لا}{۲} + \frac{1}{۵^2} جب \frac{۵ لا}{۲} - \ldots$$

یہہ اخر نتیجہ دفعہ ۳۱۳ کے ساتہہ بالکل مطابق ہے

(۳۲۷) صورت قانونیہ (۵) دفعہ گذشتہ سے ایک عجیب مسئلہ ہم ثابت کرینگے
اور اسکو اول جان برلو کے لکہا تہا فرض کرو کہ ا ب کوئی خط منحنی ہے اور
اوسکے جو مماس ا اور ب سے لگائے جائیں وہ ایک دوسرے پر قائمہ بناتے ہیں اور
اس خط منحنی کا لف نقطہ ا سے شروع ہوتا ہے اور اسکو ا س سے تعبیر کرو اور ا س کا
لف نقطہ س سے شروع اور علی ہذا القیاس یہہ سلسلہ جاری رہے تو
آخر کو جو شکل حاصل ہو گی وہ خط تدویر ہوگا
فرض کرو کہ صو طول ا ل خط منحنی کی اوس قوس کا ہے جو ا سے کسی نقطہ ع تک

اندازہ کیا جای اور نقطہ ج پر ق نصف قطر انحنا ہو اور اس نقطے کے نظیر کے نقطہ کا نصف قطر انحنا ق۱ ہو اور دوسرے لف کا نصف قطر انحنا ق۲ ہو اور تیسرے لف کا نصف قطر انحنا ق۳ ہو اور علی ہذا القیاس اصلی خط منحنی کے اور نقطہ ا کے عمود المماس کے ساتھ جو میلان ق و ق۲ و ق۴ کا ہوگا اوسکو س تعبیر کریگا اور خط منحنی کے نقطہ ب کے عمود المماس کے ساتھ جو میلان ق۱ و ق۳ و ق۵ . . کا ہوگا اوسکو بہی س تعبیر کریگا اور سوا ازین جب بر = ۰ تو ق۱ اور ق۳ اور ق۵ . . معدوم ہوتے ہین اور جب بر = $\frac{ط}{۲}$ تو بر۲ و بر۴ و بر۶ . . وغیرہ معدوم ہوتے ہین

اب ق = $\frac{ن ص ع}{د بر}$ اور ق۱ = ص پس ق۱ = ۱مع ق ز بر

علی ہذا القیاس	ق۲ = $\frac{ط}{۲}$مع ق۱ ز بر

ق۳ = ۱مع ق۲ ز بر

ق۴ = $\frac{ط}{۲}$مع ق۳ ز بر

اور علی ہذا القیاس

اب صورت قانونیہ (۵) دفعہ گذشتہ مین فرض کر ل = $\frac{ط}{۲}$ تو اس سبب سے کہ ق کوئی جملہ بر کا ہے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ق = ا۱ جم بر + ا۳ جم ۳ بر + ا۵ جم ۵ بر + . . .

اسمین ا۱ و ا۳ و ا۵ . . خاص مقادیر مستقلہ مین جو صورت قانونیہ (۵) سے تشخیص ہوتی ہین پس

ق۱ = ا۱ جب بر + $\frac{۱}{۳}$ ا۳ جب ۳ بر + $\frac{۱}{۵}$ ا۵ جب ۵ بر + . . .

ق۲ = ا۱ جم بر + $\frac{۱}{۳^۲}$ ا۳ جم ۳ بر + $\frac{۱}{۵^۲}$ ا۵ جب ۵ بر + . . .

ق۳ = ا۱ جب بر + $\frac{۱}{۳^۳}$ ا۳ جب ۳ بر + $\frac{۱}{۵^۳}$ ا۵ جب ۵ بر + . . .

اسطرح عمل کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ جب ن غیر متناہی بڑا ہو تو

ق۲ن = ا۱ جب بر یا ق۲ن = ا۱ جم بر

اور ان مساواتوں سے خط تدویر تعبیر ہوتا ہے دفعہ ۱۰۵ دیکھو
اب ہم نتیجہ کی صفت ذاتی کا امتحان اوس حالت میں کرتے ہیں کہ اصل خط منحنی کے اطراف سے مماس لگائے گئے ایک دوسرے کے ساتھہ زاویہ قائمہ پر میلان نہیں رکھتی فرض کرو کہ یہہ مماس زاویہ سہ پر میلان رکھتے ہوں اور ل کے جگہ سہ کو صورت قانونیہ (۵) دفعہ گذشتہ میں رکھہ تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ق = ا۱ جم (کہ ر / ۲ سہ) + ا۳ جم (۳ کہ ر / ۲ سہ) + ا۵ جم (۵ کہ ر / ۲ سہ) + . . .

اور اسی طرح عمل کرنے سے موافق سابق کے یہہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ

قن = ک جم (کہ ر / ۲ سہ) یا قن = ک جب (کہ ر / ۲ سہ)

اسمیں ک = ا۱ (۲ سہ / کہ)^ن

اگر ک ایک مقدار متناہی ہو تو اگر سہ بڑا کہ/۲ سے ہوگا تو خط تدویر خارجی حاصل ہوگا اور اگر سہ چھوٹا کہ/۲ سے ہوگا تو تدویر داخلی حاصل ہوگا جسمیں قطر دایرہ متحرک کا چھوٹا نصف قطر دائرہ ساکن سے ہوگا دفعات ۱۱۰ اور ۱۱۱ دیکھو اور یہہ ایک معمولی بیان نتایج کا ہے اس باب پر یہی خیال کرنا چاہئے کہ ک غیر محدود بڑا اول صورت میں اور غیر محدود چھوٹا دوسری صورت میں ہوگا

پس اول صورت میں نصف اقطار دائر ساکن اور متحرک غیر محدود زیادہ ہوتی ہوئی فرض کی گئی ہیں اور دوسری صورت میں غیر محدود کم ہوتی ہوئے

(۳۲۸) فرض کرو کہ ط اور ص اور ص - ط مثبت مقادیر ہوں

کلی متناہ صجمع طامع جم لولا مج (مو) جم لومو زمو زبو

کلی بالا جزا سے ہم کو یہہ حاصل

جمع مج (مو) جم لومو زمو = مج (مو) جب لومو / لو - مع مج (مو) جب لومو / لو زبو

اسواسطے

ص/ط مع مج (مو) جم لو مو ز مو = مج (ص) جب لو مو/لو ـ مج (ط) جب لو ط ز مو

ـ ص/ط مع مج (مو) جب لو مو/لو ز مو

پس کلی ثمناۃ کی صورت یہہ ہو جائیگے

مج (ص) ص ع مع جم لولا جب لو ص/لو ز لو ـ مج (ط) ص ع مع جم لولا جب لو ط ز لو

ـ ص ع مع ص/ط مع جم لولا مج (مو) جب لولا/مو ز لو ز مو

اول اور دوسری رقم آسانی سی بموجب دفعہ ۲۸۵ کی دریافت ہو سکتی ہین اور تیسری رقم مین ترتیب کلی کو بدل دین اور دفعہ ۲۸۵ کو کام مین لاکر بلحاظ لو کے کلی نکال کر حصل حاصل کرین تو نتایج ذیل حاصل ہونگے

اول فرض کرو کہ لا بڑا ص سی ہے تو تینون کلیون مین سے ہر یک معدوم ہو جائیگی

دوم فرض کرو کہ ط اور ص کے درمیان لا واقع ہوتا ہے تو اول رقم ۱/۲ مج (ص) کی برابر ہوگے اور دوسرے رقم صفر ہوگی اور

ص ع مع جم لولا جب لو مو/لو ز لو

برابر ۱/۲ کی موافق مو کی ان تمام قیمتون کے ہوگی جو بڑی لا سے ہین اور برابر صفر کے موافق مو کی اور قیمتون کے ہوگی پس مجٗ (مو) مین ضرب دین اور مو کے کلی لین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

۱/۲ مج (ص) ـ ۱/۲ مج (لا)

پس یہہ حاصل ہوگا کہ

۱/۲ مج (ص) ـ [۱/۲ مج (ص) ـ ۱/۲ مج (لا)]

یعنی ۱/۲ مج (لا) قیمت اصل کلی ثمناۃ کی ہے

سوم فرض کرو کہ لا چھوٹا ط سے ہے تو اول رقم ۱/۲ مج (ص) اور دوسرے رقم ۱/۲ مج (ط) اور تیسری رقم ۱/۲ [مج (ص) ـ مج (ط)] تو یہہ حاصل ہوگا کہ

۱/۲ مج (ص) ـ ۱/۲ مج (ط) ـ ۱/۲ [مج (ص) ـ مج (ط)]

کے واقع ہوا اور حدود غائی برابر برابر کے مج (ع) اور کے مج (ق) کے ہے

جس نتیجہ کا بیان اوپر ہوا ہے اوسکا نام فوریر کا مسئلہ ہے لیکن اکثر اوس صورت پر اس نام کا اطلاق کرتے ہیں جسمیں ق = -∞ اور ع = ∞ پس لا کے ہر تناہی قیمت کیواسطے ہم کو یہہ حاصل ہے

مج (لا) = $\frac{1}{\pi}$ ∞ مع ∞ مع مج (مو) جم لو (مو - لا) ز لو ز مو

(۳۳۲) پوئسن نے دفعہ ۳۳۱ کے آخر نتیجہ کا اثبات لکھا ہے اوسکو ہم دوبارہ زندہ کرتے ہیں یہہ صورت قانونیہ لو کہ

مج (لا) = ۲ ل ... مج (مو) ز مو + $\frac{1}{ل}$ ... جم $\frac{ل کہ (مو - لا)}{ل}$ مج (مو) ز مو

کہ = ھ اور ل کہ = ن ھ = لو کے رکہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

مج (لا) = $\frac{1}{۲ل}$ ... مج (مو) ز مو + $\frac{1}{\pi}$ مج [... جم لو (مو - لا) مج (مو) ز مو] ھ

لو اضعاف ھ کا ہے اور مجموعہ جو مج سے تعبیر ہوتا ہے وہ لو کے تمام قیمتوں پر ھ سے ∞ تک پہیلتا ہے لیکن اگر ل غیر محدود زیادہ ہو تو کوئی سی دو متواتر قیمتوں کا تفاوت ھ غیر محدود چہوٹا ہوتا ہے اور مجموعہ جو مج سے تعبیر ہوا ہے ایک کلی ہو جاتی ہے جو بلحاظ لو کے لو = ۰ سے لو = ∞ تک لیجاہے پس اگر ل = ∞ کے بنائیں اور ز لو کو بجاے ھ کے رکہیں اور علامت کلی کی بجاے مج کے رکہیں اور مج (مو) کو ایسا فرض کریں کہ $\frac{1}{۲ل}$ ... مج (مو) ز مو معدوم ل کے ساتہہ ہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

مج (لا) = $\frac{1}{\pi}$ ∞ مع ∞ مع جم لو (مو - لا) مج (مو) ز لو ز مو

امثلہ متفرقہ

(۱) صورت بیانیہ ... مع مج (لا و ی) ز لا ز ی میں ترتیب کلے کو بدلو

(۲) صورت بیانیہ ... مع مج (لا و ی) ز لا ز ی

(۱۲) ایک خط منحنی دو چند الجناء کا محور لا کے گرد چکر لگاتا ہی تو ثابت کرو کہ سطح مستدیر جو پیدا ہو گی
$= ۲ ک مح \left[(ء ز ء + ب ز ب)^۲ + (ء^۲ + ب^۲)(ز لا)^۲ \right]$

چودہواں باب

اوسط قیمت اور احتمالات میں علم حساب الکلیات کا استعمال

(۳۳۳) یہاں چند مثالیں ایسی لکھی ہیں کہ جنسے معلوم ہوگا کہ علم حساب الکلیات کا استعمال اوسط قیمت اور احتمالات میں کس طرح ہوتا ہے

فرض کرو کہ مح (لا) جملہ لا کو تعبیر کرتا ہے اور لا متواتر برابر ط و ط + ھ و ط + ۲ ھ ... ط + (ن - ۱) ھ

$$\frac{مح (ط) + مح (ط + ھ) + مح (ط + ۲ ھ) + \cdots + مح [ط + (ن - ۱) ھ]}{ن}$$

اوسط قیمت اون قیمتوں کا کہتی ہیں جو مح (لا) کے قیمتیں لا کی ن قیمتوں سے پیدا ہوں

فرض کرو کہ ص - ط = ن ھ تو اوپر کی اوسط قیمت کو اسطرح لکھ سکتے ہیں کہ

$$\frac{\{مح (ط) + مح (ط + ھ) + \cdots + مح [ط + (ن - ۱) ھ]\} ھ}{ص - ط}$$

فرض کرو کہ ط اور ص قائم رہیں اونمیں کچھ تغیر نہ ہو اور ن غیر محدود زیادہ ہو تو اوپر کی صورت بیانیہ کی حد غائی یہہ ہو گی کہ

$$\frac{\int_{ط}^{ص} مح (لا) \, ز لا}{ص - ط}$$

پس اسکی تعریف یہہ ہے کہ وہ اوسط قیمت مح (لا) کی جب ہے کہ لا متواتر لا اور ص کے

(۳۳۴) یہہ سوال ایک مثال اوپر کی دفعہ کی ہے کہ دائرہ کے محیط پر ایک نقطہ معین ہے اوسے دائرہ کے اندر جو تمام نقطی فاصلے رکھی ہیں اونکا اوسط دریافت کرو

اس بیان دعوی سے مطلب یہہ ہے کہ عمل ذیل کریں فرض کرو کہ دائرہ کا رقبہ بہت سے ن برابر چھوٹے چھوٹے رقبوں میں تقسیم ہوے اور ایک کسر بناو جسکا شمار کنندہ مجموعہ ان رقبوں کے ابعاد کا نقطہ معین محیط سے ہو اور نسب نماں ن ہو تو حد غائی اس کسر کی جب ن غیر محدود ہو دریافت کرو

فرض کرو کہ ن و ن ... جدا جدا چھوٹے چھوٹے رقبوں کے فاصلوں کو تعبیر کرتا ہے

اول خط مستقیم سی ہی اور اوسپر یون ہین کہدی گئی ہین اور ہر ایک مقام کا احتمال یکسان ہی ور طول ان خطوط مستقیم کا ص اور ص' ہے تو احتمال اس بات کا دریافت کرو کہ اونکا حصہ مشترک س سی بڑا مدنہ ہو ما حصل

$$\frac{(\text{ط}-\text{ص}+\text{ص}'+\text{س})^2}{(\text{ط}-\text{ص})(\text{ط}-\text{ص}')}$$

(۱۱) ایک غیر محدود سطح مستوی ہی اور اوسپر دل سی خطوط مستقیم متوازیہ متساوی الابعاد کہینچی گئی ہین اور ہر دو متصل کے خطوط مستقیم کے درمیان بعد س ہی ایک خط منحنی مقید جسمین کوئی نقطہ مخصوصہ نہ ہو اور جسکا قطر چہوٹا س سی ہو اوس سطح پر پہینکا گیا ہی تو ثابت کرو کہ کسی ایک خط مستقیم پر ان خطوط مستقیم مین سے اوسکے واقع ہونیکا احتمال $\frac{\text{ل}}{\text{ر س}}$ ہے اور ل احاطہ خط منحنی کا ہے

(۱۲) ا اور ب کے درمیان ط فاصلہ ہی اور ا سے ایک قاصد ب کی طرف چلا اور رفتار اوسکی مو میل فی گہنٹہ ہی لیکن پہلے اسی کہ وہ ب پر پہونچے مینہ برسنا شروع ہوا اور برستا ہوا خاص فاصلہ تک چلا گیا مگر ب سی پہری تہ برسا اور مینہ کی بیال نو میل فی گہنٹہ تہی اگر قاصد کو مینہ مے لے اور وہ اتنی سرعت سے جائے کہ مینہ سے بچا رہے اور پیغام پہونچانی کی اجرت مین جو روپیہ وہ پاتا اوسکو نسبت معکوس وقت پیغام رسانی سے بشرح ن روپیہ فی گہنٹہ کی ہی اور فرض کرو کہ فاصلہ سے معلوم نہین اور وہ بارش کے اغاز کا وقت بہی معلوم نہین مگر احتمال وقوع دونو کا یکسان ہی تو ثابت کرو کہ قاصد کی توقع کی قیمت روپیون مین

$$\frac{\text{ن مو}}{\text{ط}}\left[\frac{1}{2}-\frac{\text{لو}}{\text{مو}}+\frac{\text{لو}(\text{لو}+\text{مو})}{\text{مو}^2}\ \text{لوگ}\ \frac{\text{لو}+\text{مو}}{\text{مو}}\right]$$

ہے

(۱۳) ایک قبہ مستوی بہت بڑا ہی اور اوسپر دل برابر برابر فاصلہ پر خطوط مستقیم سی کیا گیا ہے اور دوسرا دل بہی برابر فاصلہ پر خطوط مستقیم سی کیا گیا ہی اور یہہ خطوط مستقیم عمود دوسرے خطوط مستقیم پر کہینچی گئی ہین اور تسکا اوس مستوی رقبہ پر پہینکا گیا ہی تو بتاؤ کیا احتمال اس بات کا ہی کہ خط کو قطع کریگا

(۱۴) جن خطوط مستقیم کا اوپر بیان کیا گیا ہے اوس پر ایک مکعب پہینکا جائے تو اس بات کا کیا احتمال ہے کہ وہ خط کو قطع کریگا

(۱۵) فرض کرو کہ ن نقطے ترتیب وار ایک قطار مین خط مستقیم مین واقع ہوئے اور ان نقطوں سے معین برابر صو کے کہینچے گئے اور سوا اسکے اول معین بڑا دوسرے معین سے ہے اور دوسرا معین بڑا تیسرے معین سے نہین ہی اور علے ہذا القیاس ثابت کرو کہ اوسط قیمت رو' ین معین کی

$$\frac{\text{صو}}{\text{ن}}\left[\frac{1}{\text{ن}}+\frac{1}{\text{ن}-1}+\frac{1}{\text{ن}-2}+\cdots+\frac{1}{\text{ن}-\text{ر}+1}\right]$$

پندرہوان باب
حساب تغیرات کا

حدغائی زیادتی اور کمی کلی کی جسمین ایک مقدار متغیر حدود غائی معین کے ساتھہ ملتف ہو۔

(۲۳۷) علم حساب الجزئیات کی کتابون مین معلوم جملون کی حدود غائی حد زیادتی و کمی کی قیمتون کا بیان مفصل ہوتا ہی مثلاً اگر مقدار متغیر متبوع لا کے جملہ معلوم کو ر تعبیر کرے تو قیمت یا قیمتین لا کی ایسے دریافت کرسکتے ہین کہ ر کی حد غائی زیادتی یا کمی پر پہونچاوین یا ہم بعض صورتون مین ثابت کردینگے کہ ایسے قیمتین نہین ہین۔

اب ہم ایک اور نوع کے سوالات حد غائی زیادتی اور کمی کا بیان کرتے ہین۔ فرض کرو کہ ر جملہ لا کا ہو اور وہ بالفعل غیر المعین ہو اور مو ایک جملہ معلوم لا و ر و $\frac{د ر}{د لا}$ و $\frac{د^2 ر}{د لا^2}$ کا ہو فرض کرو کہ ہم کو لا اور ر کے درمیان وہ ربط دریافت کرنا ہے کہ کلی مح مو ز لا جو حدود غائی معلوم کے درمیان واقع ہو قیمت حد غائی کمی یا زیادتی کی رکھے۔

اب ہم یہان کلی نہین لے سکتے کیونکہ یہہ معلوم نہین ہے کہ جملہ لا کا ہے اسواسطے مو معلوم نہین ہے کہ جملہ لا کا ہے اسواسطے جو طریقہ کہ سوالات حد غائی زیادتی اور کمی کی دریافت کرنے کا معمولی ہے وہ یہان کام نہین آسکتا اسلئے ضرور ہے کہ ایک نئی ترکیب کا بیان ہو

(۲۳۸) اب جس معاملہ تحلیل کا بیان ہم کرینگے طالب علم اوسکا نام حساب متغیرات رکہی اور اسکا موضوع یہہ ہے کہ صور بیانیہ کلیات کے حد غائی زیادتی یا کمی کی دریافت کرین اور یہہ صور بیانیہ ایسے فرض کیے گئی ہین کہ مقادیر متغیر متبوع سے جو جملے تعبیر ہوے ہین اونکی مختلف صورتون کے تقرر کرنے سے وہ متغیر ہوتی ہین جب طالب علم آگے پڑہینگے تو اونکو معلوم ہوگا کہ اس حد غائی زیادتی یا کمی کے دریافت کرنی کے ترکیب بھی مماثل علم حساب الجزئیات کی ترکیب کی ہے جس سے حد غائی زیادتی یا کمی معلوم ہوتی ہے +

(۲۳۹) مناسب معلوم ہوتا ہے کہ علم حساب الجزئیات مین جو ترکیب لکھی ہے اوسکو ہم

یہان بیان کرین طالب علم کو یاد ہوگا کہ حد غائی زیادتی یا کمی کی اصطلاحات مین اور
اونکی تعریف علم حساب الجزئیات کے رسالہ مین بہت توضیح کے ساتھہ کی گئی ہے اور علم
ریاضی مین اونکی وہی معنے لئے جاتے ہین جو وہان لکھے ہین اکثر غلطی اس سبب سے واقع
ہوتی ہے کہ اصطلاحی معنے جو حد غائی زیادتی کے ہین اور بڑی سی بڑی قیمت کے معنے جو
روزمرہ کی بول چال مین ہین ان دونو معنی کو خلط ملط کردیتی ہین زیادتی اور بڑی سے
بڑی کے معنے مین خلط ہوجاتا ہے ۔

فرض کرو کہ ر جملہ مقدار متغیر تابع لا کا ہے پس اگر نہایت ہی چھوٹا تغیر لا مین کیا جاے
تو اکثر اس سبب سے نہایت ہی چھوٹا تغیر ر مین پیدا ہوجائیگا اور اوسکا مقابلہ بلحاظ مقدار کے
تغیر لا سے ہوجائگا ر کی حد غائی زیادتی یا کمی کی قیمت دریافت کرنے کا جو عمل ہے اوسمین
دو جز ہین اول جز یہ ہے کہ ہم لا کی ایسی قیمت تشخیص کرتے ہین کہ اوسمین نہایت ہی چھوٹا
تغیر ر مین نہایت ہی چھوٹا تغیر مقابلہ کے قابل نہین پیدا کرتا بلکہ ایک تبدل نہایت ہی چھوٹا
بمقابلہ لا کے تبدل کے ہوتا ہے اب دوسرا جز یہ ہے کہ اس نہایت چھوٹی تبدل سے جو ر
مین لا کے تبدل کے سبب سے پیدا ہوا ہے اوسکی علامت کا امتحان کرتے ہین اور حد غائی
زیادتی کی صورت اس علامت کا منفی ہونا اور حد غائی کمی کی صورت مین مثبت ہونا
ضرور ہے ۔

پس ہم اس عمل کو اختصار کے ساتھہ یون بیان کرتے ہین کہ اول مرتبہ کی قیمن مقدار متغیر
تابع کی تبدل مین معدوم کرو اور دوسری مرتبہ کے ارقام کے علامتونکا امتحان کرو
اب ہم اسی ترکیب کے متشابہ بیان کرینگے جس سے کہ ہمارا سوال جو معرض بحث
مین ہے حل ہوگا ۔ بالفعل ہم اول ہی جز عمل کی ساری توجہ کرتے ہین اور بعد ازان
دوسری جز عمل پر توجہ کرینگے ۔

(۲۴۴) اب اول ہم اوس طریقہ کتابت کا بیان کرتے ہین جسکو آگے کام مین لائینگے ۔

فرض کرو کہ لا مقدار متغیر تابع ہے ر جملہ لا کا ہے اور نزلا ی اور نزلا ی سر جزوی ر کی بلحاظ لا کے ہین ہم فرلو سے ایک نہایت چہوٹی مقدار کو تعبیر کرینگے جو جملہ لا کا ہو اور اگر ر کسی مقدار کو تعبیر کرے جو موقوف ر پر ہو تو فر سے اوس زیادتی کو تعبیر کرینگے جو ر کو ر + فر ر مین بدلنے سے ر مین پیدا ہوگی مثلا سر جزوی نزلا ی پر خیال کرو جب ر مین زیادتی فر ر کی ہوتی ہے تو اس سر جزوی مین زیادتی نزفر ی کی ہوتی ہے پس فر نزلا ی سے مراد نزفر ی ہے اکثر اسمین آسانی ہوتی ہے کہ رمز ع کو نزلا ی کے جگہہ کام مین لائین اور رمز فر ع کو نزفر ع کی جگہہ اب دوسری سر جزوی نز۲ ر / نزلا۲ پر خیال کرو جب ر مین زیادتی فر ر کی ہو تو دوسری مرتبہ کی سر جزوی مین زیادتی نز۲ فر ر / نزلا۲ ہوگی اکثر دوسرے مرتبہ کی سر جزوی کو ق سے تعبیر کرو تو آسانی کے لئے فر ق کو بجائی نز۲ فر ر / نزلا۲ کام مین لاتے ہین اور علے ہذا القیاس ف اور ص کو بجای تیسرے اور چوتہی مرتبہ کی سر جزوی کے کام مین لاؤ اور نز۳ فر ر / نزلا۳ اور نز۴ فر ر / نزلا۴ کو فر ف اور فر ص سے تعبیر کرو اور علی ہذا القیاس سر جزویون کو اکثر رکو و ر و ر و ر ... سے تعبیر کرتے ہین اور فر ر اور فر ر اور فر ر ... مساوی لہ فر ع اور فر ق اور فر ف ... موافق اپنی نظیرکی ہین

(۴۴۳) رمز فر کا داخل کرنا ایجاد لاگرانژ کا ہے طالب علم اس بات کو سمجہہ جائیگی کہ اس رمز کے معنے ایسے ہی ہین جیسے کہ علم حساب الجزئیات مین ز کے معنے تہے دو تو ز ر اور فر ر ایک لا نہایت چہوٹی زیادتی کو تعبیر کرتے ہین ز ر علے العموم اوس تغیر کو تعبیر کرتا ہے جو جملہ معلوم کے قیمت مین بہ سبب تغیر قیمت متغیر تابع کے واقع ہوتا ہے اور فر ر اوس تغیر کو تعبیر کرتی ہی کہ صورت جملہ مین کسی تغیر اختیاری کے سبب سے پیدا ہوا ہی مقدار جو فر ر سے تعبیر ہو اوسکو تغیر ر کہتے ہین

(۴۴۴) فرض کرو کہ مو جملہ معلوم لا و ر و نزر / نزلا و نز۲ ر / نزلا۲ ... تعبیر کرتا ہے اور لو = لا ابع مو ز لا اسمین لا. اور لا ا حدود خائی کو تعبیر کرتے ہین قیمت لو کی جب

ہنین دریافت کرسکتے ہین کہ ہم کو یہہ نہ معلوم ہو کہ کون خاص جملہ لا کا دمیں ہے مگر تعبیر اس علم کی یہی ہم صورت بیانیہ اوس زیادتی کے دریافت کرسکتے ہین جو بوین اختیاری زیادتی فرد کو ر مین کرنے سے پیدا ہوتی ہے اور اس سے نتایج عظیمہ استخراج ہوتے ہین۔

فرض کرو کہ مو = مج (لا و ر و ی و گ و ...)

تو بموجب حدود کے

فرمو = مج (لا و ر + فر و ی + فر ی و گ + فر گ و ... + فر ...)

مج (لا و ر و ی و گ و ...)

ٹیلر صاحب کے ضابطہ کے موافق اول رقم معمول کے موافق پہیل سکتی ہے پس

فرمو = مو/ر زفر + مو/ی فری + مو/گ فرگ + مو/... فر ... + ...

اسمین مو/ر سر جزوی بالاجزا مو کا بلحاظ ر کے ہے اور نیز مو/ی سر جزوی بالاجزا مو کا بلحاظ ی کے ہے اور علی ہذا القیاس

اوپر کے صور بیانیہ مین فرمو کی جگہ ہم نے اول مرتبہ کے ارقام کو بیان کیا ہے یعنے ہم نے دوسرے مرتبے کی اور دوسرے زیادہ مرتبہ کی ارقام کو بلحاظ چہوٹی چہوٹی مقادیر فر ر اور فر ی ... کے چہوڑ دیا ہے یہی عمل تمام اپنی تحقیقات مین جاری رکہینگے

پس فرلو = ∫لا مع [مو/ر فر ر + مو/ی فر ی + مو/گ فر گ + مو/... فر ... + ...] زلا

اب ہم اس صورت بیانیہ کی کلی بالاجزا الیکر اور ہیئت مین بدلتے ہین اختصار کے واسطے

مو/ر = نہ اور مو/ی = عو اور مو/گ = قو اور مو/... = ۷ ..

تو مع عو فری زلا = مع عو فری/زلا زلا = عو فری ـ مع عو/زلا فری زلا

اسواسطے ∫لا مع عو فری زلا = (عو فری)۱ ـ (عو فری) ـ ∫لا مع ـ عو/زلا فری زلا

یہان عو فری سے مراد عو فری کی قیمت ہے جب کہ لا بجای لا کے رکہا جای اور (عو فری) سے مراد قیمت عو فری کی ہے جب کہ لا بجای لا کی رکہا جائی اسی قبیل کا طریقہ کتابت آگے تمام کام مین آئیگا

اس بات کو بڑی احتیاط سی دیکہنا چاہیے کہ ر ع/ر لا سے کامل سر جزوی عو کا بلحاظ لا کی
مراد ہے یعنے ر ع/ر لا کے بنانی مین ہمکو یاد رکہنا چاہیے کہ ی اور اوسکی سر جزوی مین پیچید گے
ساتہہ ملتف ہے

پہر مع قو فر ی زلا = مع قو ر ی/ر لا فر ی زلا = قو ر فر ی/ر لا - مع ر قو/ر لا ر و/ر لا ر فر ی/ر لا رلا

= قو ر فر ی/ر لا - ر قو/ر لا فر ی + مع ر ۲ ق/ر لا۲ فر ی رلا

اسواسطے

لا/لا مع قو فر ی رلا = (قو ر فر ی/ر لا - ر قو/ر لا فر ی) - (قو ر فر ی/ر لا - ر قو/ر لا فر ی)

+ لا/لا مع ر ۲ قو/ر لا۲ فر ی ز لا

اور اسیطرح

لا/لا مع س فر ی زلا = (س ر ۲ فر ی/ر لا۲ - ر س/ر لا ر فر ی/ر لا + ر ۲ س/ر لا۲ فر ی)

- (س ر ۲ فر ی/ر لا۲ - ر س/ر لا ر فر ی/ر لا + ر ۲ س/ر لا۲ فر ی) - لا/لا مع ر ۳ س/ر لا۳ فر ی زلا

اس عمل کو جاری جب تلک کہ تمام رموز فر ی و فر ی' و فر ی'' و فر ی''' . . . کلی علامت سے
نکل آئین اور اس بات پر خیال کرو کہ تمام سر جزئیان

ر قو/ر لا و ر ۲ قو/ر لا۲ و ر س/ر لا و ر ۲ س/ر لا۲ و ر ۳ س/ر لا۳ کامل سر جزئیان ہین
اس سے آخر کار معلوم ہوگا کہ

فر لو = فر ی ۱ [عو - ر قو/ر لا + ر ۲ س/ر لا۲ . . .] - فر ی . [عو - ر قو/ر لا + ر ۲ س/ر لا۲ - . .]

+ فر ع ۱ [قو - ر س/ر لا + . .] ۱ - فر ع [قو - ر س/ر لا + . .] .

+ فرق ۱ [س - ۱ . .] ۱ - فرق . [س - . . .

+ . . . .

لا/لا مع (ن - ر ع/ر لا + ر ۲ قو/ر لا۲ - ر ۳ س/ر لا۳ . .) فر ی زلا

یہان طریقۂ کتابت کی بعض سادہ اور صاف صورتین بدیہی اختیار کین ہین مثلاً فر ی ۱ کو بجای
(فر ی) ۱ اور فر ع ۱ کو بجای (ر فر ی/ر لا) ۱ کے اور علی ہذا القیاس کام مین لائین

(۳۴۴۳) قیمت فر لو کی اسطرح تعبیر ہو سکتی ہے کہ

فر لو = ھـ ۱ ـ ھـ ٠ + لاً امح ک فر ز لا

یہان ھـ ۱ سے ایک خاص مجموعہ ارقام کا تعبیر ہوتا ہے جسمین لا ۱ بجای لا کے رکھا گیا ہے اور ھـ ٠ اوسکے بھی متماثل مجموعہ ارقام ہے جسمین لا ٠ بجای لا کے رکھا گیا ہے ان مجموعوات مین

ک = نہ ـ ز ع / ز لا + ... ـ ... + . . .

چونکہ ھـ ۱ ـ ھـ ٠ مین صرف وہ قیمتین مقادیر متغیر کی داخل ہین جو حدود خاص پر ہین اسلئے بعض اوقات ہم کہینگے کہ ھـ ۱ ـ ھـ ٠ ارقام علے الحدود مین

(۳۴۴) اب ہم اون شرائط کی تحقیق کرتے ہین جسسے کہ لو کی حد زیادتی یا کمی کی قیمت حاصل ہو اب تاکہ لو قیمت حد خائی زیادتی یا کمی کی رکھی اوسکے لئے ضرور ہے کہ فر لو معدوم ہو خواہ فر کچھہ ہو مگر اوسکی ساتھہ یہہ شرط ہو کہ وہ نہایت چھوٹی مقدار ہو اسکے لئے یہہ ضرور ہی کہ

ک = ٠ اور ھـ ۱ ـ ھـ ٠ = ٠

اسواسطے کہ اگر ک ہمیشہ صفر نہ ہو تو یہہ ہماری اختیار مین ہو گا کہ فر کی ایسی قیمت مقرر کرین کہ فر لو مثبت یا منفی ہماری مرضی کے موافق ہو اور صفر نہو مثلا فرض کرو کہ فر ز سر حز وی اعلے درجہ کا جو ھـ ۱ ـ ھـ ٠ مین واقع ہوتا ہے ن وان مرتبہ رکھتا ہے

فر ز = سہ (لا ـ لا ۱)^ن (لا ـ لا ٠)^ن اس رکھو اسمین سہ جملہ لا کا ہے جو نہایت ہی چھوٹا ہے اور بالفعل وہ غیر المعین ہے پس یہہ قیمت فر کی ھـ ۱ ـ ھـ ٠ کو معدوم کرتی ہے پس فر کی تحویل لاً امح ک فر ز لا مین ہوگی اب سہ کو ایسا مقرر کرو کہ وہ ہمیشہ مثبت ہو جبکہ ک مثبت ہو اور منفی ہو جب ک منفی ہو تو فر لو ضرور مثبت ہو گا اور اگر علامت سہ کی بدل دین تو فر لو ضرور منفی ہو گا پس اگر ک ہمیشہ صفر نہو تو یہہ ہماری اختیار مین ہی کہ فر کو ایسا مقرر کرین کہ فر لو مثبت یا منفی ہماری مرضی کے موافق ہو اسئی معلوم ہوا کہ لو کی قیمت حد خائی زیادتی یا کمی کی لئی ک = ٠ کے ہونا چاہئی اور لاً امح ک فر ز لا معدوم ہوتا ہی اور اسواسطے ھـ ۱ ـ ھـ ٠ = ٠ کے ہونا چاہئے —

(۵۴۳) پس طالب علم اب حساب متغیرات کے اصل آثار سے واقف ہوگیا ہوگا اور یہہ اصل آثار یہہ ہین

(۱) تحویل فرلو کی ھ ا ھ ۔ ۰ + لا ا مع ک فرو زلا مین

(۲) یہہ اصول کہ ک معدوم ہو تاکہ نو حد غائی زیادتی یا کمی کی رکھی اگرچہ اس مطلب کی تشریح بڑی ہے اور اس سوال کے طرح طرح توسیع ہوئی مگر جو دو نتیجے ہم نے اوپر لکھے ہین وہی بڑی نتیجے ہین —

(۵۴۶) اب ہم نہایت تدقیق کے ساتھہ امتحان ان دو شرائط

ک = ۰ اور ھ ا ھ ۔ = ۰

کی صفت ذاتی کا کرتے ہین مساوات ک = ۰ کو مساوات جزئی کہتے ہین

فرض کرو کہ ر لا سے سب سے اعلی درجہ سر جزوی کا ہی جو مین واقع ہوتا ہی تو یہہ اکثر سا مین بہی واقع ہوگا اور اسیواسطے ز ۲ / د لا ۲ مین سر جزوی ز ۲ / ر لا واقع ہوگی اور یہہ سب سے اعلی درجہ کا سر جزوی ہوگا جو ک مین واقع ہوگا پس مساوات جزئی ک = ۰ کی چہٹے درجہ کی ہوگی غرض اکثر درجہ مساوات جزئی کا دو چند اوس سر جزوی کے مرتبہ سے ہوگا جو مو مین واقع ہوگا —

معادلات جزئی کے رسالون سے یہہ ثابت ہوتا ہی کہ مساوات جزئی مین اتنے ہی مقادیر مستقلہ اختیاری ہوتے ہین جتنا کہ درجہ مساوات جزئی کا ہوتا ہی

اب ہم یہہ بتلا دینگے مقادیر مستقلہ اختیاری جو مساوات ک = ۰ کی داخل کرنے سے پیدا ہوتے ہین کس طرح تشخیص ہوتے ہین کہ جس سے نتیجہ محدود حاصل ہو شرط ھ ا ھ ۔ = اسی کام آتی ہے

دو صورتین پیدا ہوسکتی ہین —

(۱) فرض کرو کہ کوئی شرط سوال مین لا کی قیمتون کے واسطے نہین لگائی جاتی اور اوسکی سر جزوی ان

کلی کے حدود غائی پر ہین تو فر۱ اور فر۰ اور فرع۱ اور فرع۰ تمام اختیاری مقادیر ہین یعنی
یہہ ہمکو اختیار ہی کہ نہایت چہوٹی مقدار جو چاہین ان مقادیر کے واسطے مقرر کر لین مثلاً
ہم اونمین سے جتنی مقدارونکو چاہین صفر فرض کرین چونکہ فر۱ اور فر۰ اور فرع۱ اور فرع۰
تمام اختیاری ہین تو اسواسطے کہ ھـ ـھـ یقینی معدوم ہوجاتی امثال ہر ایک مقدار کا
مقادیر اختیاری مین سی معدوم ہونا چاہیے اس سے اوتنے ہی مساواتین جتنی کہ مقادیر مستقلہ ہین
مقادیر مستقلہ کی تشخیص کرنیکے واسطے حاصل ہونگین

(۲) دوم فرض کرو کہ سوال مین ر کی قیمتونکے واسطے شرائط لگائی گئی ہین اور اوسکی سر جزیات
کلی کی حدود غائی پر ہین تو فر۱ و فر۰ و فرع۱ و فرع۰ تمام اختیاری ہین اسواسطے
کہ بعضی اونمین سی شرائط معلوم کی وساطت سی ہاسنے نقاط کی ارقام مین بیان ہوسکتی ہین
فرض کرو کہ جتنی ممکن ہون اوتنی مقادیر فر۱ و فر۰ و فرع۱ و فرع۰ مین سے
ھـ ا ھـ مین ساقط کیجائین تو جو باقی رہین اونکی امثال کو برابر صفر کے لکہو
پس مساواتین جو اسطرح حاصل ہونگی مع اون مساواتونکے جو شرائط معلوم کو پورا کرتی ہین اتنی
مساواتین تعداد مین ہوجائنگی جتنی مقادیر مستقلہ تعداد مین ہین اور اس سبب سے مقادیر مستقلہ
کی تشخیص کرنیمین وہ کام دینگی —

(۲۴۷) بڑی مشکل مثالون کے اندر یہہ اکثر پڑتی ہی کہ مساوات جزی ک = ۰ کی حل
کرنی دشوار ہوتی ہے اور بعض اوقات یہہ مشکل کسیطرح حل نہین سکتی اب ہم یہہ بتلائینگے
کہ جب مومین مقدار متغیر متبوع سادگی کے ساتہہ نہین ملتف ہوتی تو ہم ایک قدم ہمیشہ مساوات
جزئی کے حل کرنیمین چل سکتے ہین عملیات کے لئی فقط یہی کافی ہوگا کہ ہم فقط وہی صورت
لین جسمین سر جزوی ر کا تیسرے مرتبہ سے زیادہ نہین آتا
چونکہ مومین بموجب فرض کے لا بغیر پیچیدگی کے ملتف ہے تو ہمکو مو کی کامل سر جزوی کے
واسطے یہہ حاصل ہے کہ

ر نسو / رلا = نہ ر ز ی / ر لا + عو ر ز ع / ر لا + فو ر ز ف / ر لا + س ر ز ک / ر لا

اور بموجب فرض کے

۰ = نہ − ر ز عو / ر لا + ر۲ ز فو / ر لا۲ − ر۳ ز ک / ر لا۳ . . . (۱) پس

ر نسو / ر لا = ر ز عو / ر لا . ر ز ی / ر لا + عو ر ز ع / ر لا − ر۲ ز فو / ر لا۲ . ر ز ی / ر لا + فو ر ز ق / ر لا + ر۳ ز ک / ر لا۳ . ر لو / ر لا + س ر ز ر / ر لا

اب ر ز ع / ر لا . ر ز ی / ر لا + عو ر ز ع / ر لا = ر ز / ر لا (عو ر ز ی / ر لا)

ر۲ ز فو / ر لا۲ . ر ز ی / ر لا − فو ر ز ق / ر لا = ر ز / ر لا [ر ز فو / ر لا . ر ز ی / ر لا − فو ر۲ ز ی / ر لا۲]

ر۳ ز ک / ر لا۳ . ر ز ی / ر لا + س ر ز ر / ر لا = ر ز / ر لا [ر۲ ز ک / ر لا۲ . ر ز ی / ر لا − ر ز ک / ر لا . ر۲ ز ی / ر لا۲ + س ر۳ ز ی / ر لا۳]

اس سے معلوم ہوا کہ کلی لینے سے

مو = عو ر ز ی / ر لا + ر ز فو / ر لا . ر ز ی / ر لا − فو ر۲ ز ی / ر لا۲ + ر۲ ز ک / ر لا۲ . ر ز ی / ر لا − ر ز ک / ر لا . ر۲ ز ی / ر لا۲ + س ر۳ ز ی / ر لا۳ + س (۲)

اس مین س ایک اختیاری مقدار مستقلہ ہے سب سے اعلی درجہ سر جزوی جو (۲) مین واقع ہوسکتا ہے ر۳ ز ی / ر لا۳ ہے جو ر۳ ک / ر لا۳ کے اندر آتا ہے پس (۲) ایک مساوات جزوئی پانچوین درجہ کی ہے اور یہہ کلی اول مساوات (۱) کی ہے اور مساوات (۱) چھٹے درجہ کی ہے

خاص صورتین س یا فو یا عو کو صفر فرض کر کے نکل سکتی ہین مثلاً بڑی لکھا آبد صورت یہہ جسمین مو کے اندر صرف د اور ر ی / ر لا ملتف ہوتا ہے پس (۱) کی یہہ صورت ہوجاتی ہی کہ

نہ − ر ز عو / ر لا = ۰

اور (۲) کی یہہ صورت ہوجاتی ہے کہ

لو = عو ر ی / ر لا + س

(۴۸۳) مساوات جزوی ک = ۰ یہی قابلیت ایک ہی کلی کی رکھتی ہے جب مو مین مقدار متغیر تابع سے داخل ہوا سواسطے کہ نہ = ۰ کے ہونی سے مساوات یہہ ہوجائیگی کہ

ر ز عو / ر لا − ر۲ ز فو / ر لا۲ + ر۳ ز ک / ر لا۳ − . . . = ۰

اور اسواسطے

عو − ر ز فو / ر لا + ر۲ ز ک / ر لا۲ − . . . = س

(۳۴۹) ہم کو معلوم ہے کہ لاَامع مو ز لا = مغ امو ز لا/ زو ز ، یہہ فرض کر لیا ہے کہ کلی کی حدود
غائی بلحاظ د کے ایسی مقرر کی گئی ہین کہ وہ متناظر اوس کلی کی حد غائی کی ہین جو بلحاظ د کے
لیجائیں اور سر جز دیان ر کی بلحاظ لا کی اون سر جزو نکی ارقام مین بیان ہو سکتی ہین جو
لا کے بلحاظ د کے لیجائین پس مع مو ز لا/ زو ز ، مین د مقدار متبوع اور لا کو تابع خیال
کر سکتے ہین اور اس نئی صورت مین کلی کی حد غائی زیادتی یا کمی کی ہم دریافت کرتے ہین
ہم پہلے سے اسکو یقینی جانتے ہین کہ سوال نفس الامر مین مقدار متغیر متبوع کے تبدل سے
متبدل نہین ہوتا اور اس سبب سی ہم کو وہی نتیجہ حاصل ہوگا جو اصل مقدار متغیر متبوع
قایم رکہنے سے حاصل ہوتا۔

اس سی معلوم ہوا کہ دفعات ۳۴۷ اور ۳۴۹ کی صورتین آپسمین مطابق ہین

(۳۵۰) پہر ہم کو فرض کر لینے دو کہ مو مین صرف ع اور ق ملتف ہین تو مساوات جزئی
ک = ۰ کی تحویل اور اختصار

$$- \frac{\text{ر عو}}{\text{ر لا}} + \frac{\text{ر}^2 \text{فو}}{\text{ر لا}^2} = ۰$$

اسواسطے کل لینے سے

$$\text{عو} = \frac{\text{ر فو}}{\text{ر لا}} + \text{س}_۱$$

$$\text{اور نیز } \frac{\text{ز مو}}{\text{ز لا}} = \text{عو} \frac{\text{ز ع}}{\text{ز لا}} + \text{فو} \frac{\text{ر ق}}{\text{ر لا}}$$

$$= \text{س}_۱ \frac{\text{ر ع}}{\text{ر لا}} + \frac{\text{ر فو}}{\text{ر لا}} \frac{\text{ر ع}}{\text{ر لا}} + \text{فو} \frac{\text{ر ق}}{\text{ر لا}}$$

اسواسطی کلی لینے سے

$$\text{مو} = \text{فو ق} + \text{س}_۱ \text{ ع} + \text{س}_۲$$

یہان س۱ اور س۲ مقادیر مستقل ہین اس صورت مین مساوات جزئی ک = ۰ چوتہے
درجہ کی ہے اور نتیجہ جو حاصل ہوگا وہ مساوات جزئی درجہ دوم کی ہے پس ہم نے دو قدم
مساوات جزئی ک = ۰ کی کلی مین طے کی

(۳۵۱) اب ہم چند مسایلکو لکہتے ہین اور اوسمین جز اول کی طرف حد غائی زیادتی یا کمی کے

قیمتونکو دریافت کرنیکی واسطے عمل مین بالکل توجہ کرینگے دفعہ ۳۳۹ دیکھو

(۳۵۲) دو نقطونکے اندر چھوٹے سے چھوٹا خط دریافت کرو

اس مثال کو فقط اسلئے لکھا ہے کہ صورت قانونیہ کی توضیح خوب ہو جاوی کیونکہ یہہ ظاہر ہے کہ نتیجہ خط مستقیم ہوگا جو اون دو نقطون کو وصل کریگا

یہان $بو = \sqrt{(۱ + ع^۲)}$ اور $لو = \int_{لا_۰}^{لا_۱} \sqrt{(۱ + ع^۲)}\, زلا$

پس مو مین ع ملتف ہین اور مساوات $ک = ۰$ کی تحویل اور اختصار یہہ ہوگا کہ $\frac{رعو}{رلا} = ۰$

پس عو ایک مقدار مستقل ہو یعنی $\frac{ع}{\sqrt{(۱ + ع^۲)}}$ ایک مقدار مستقل ہو اس سے ثابت ہوتا ہی کہ ع ایک مقدار مستقل ہو اسواسطے خط چاہیے ایک خط مستقیم ہو

اس صورت مین $ھ_۱ - ھ_۰ = \frac{فری_۱ ع_۱}{\sqrt{(۱ + ع_۱^۲)}} - \frac{فری_۰ ع_۰}{\sqrt{(۱ + ع_۰^۲)}}$

اگر اب دو نقطے نقاط معین ہون تو یہہ حاصل ہوگا کہ $فری_۱ = ۰$ اور $فری_۰ = ۰$ پس $ھ_۱ - ھ_۰$ معدوم ہوتا ہے تو قیمت ع کی اس شرط سے دریافت ہوتی ہی کہ خط مستقیم دو نقاط معین مین گذرے

لیکن فرض کرو کہ معین دونو نقطون کی ابہی نہین مقرر ہوی اور محدد مقرر ہین کیونکہ $لا_۱$ اور $لا_۰$ مقادیر مستقل خیال کی گئی ہین اس صورت مین $فری_۱$ اور $فری_۰$ اختیاری ہین اور اسواسطے $ھ_۱ - ھ_۰$ ضرور نہین ہے کہ معدوم ہو اس اشتمال $فری_۱$ اور $فری_۰$ کے معدوم نہون اس بابکے لئی ضرور ہے کہ $ع_۱$ اور $ع_۰$ معدوم ہونی چاہئی پس صورت قانونیہ بالکل مطابق اس امر بدیہی کے ہی کہ جب دو خطوط مستقیم متوازی ہون تو سب سی چھوٹا فاصلہ اونکے درمیان خط مستقیم ہوگا جو عمود دونو خطون پر ہو —

(۳۵۳) ایک خط ایسا دریافت کرو کہ اوسکے ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک ایک چیز بہت ہی جلد اتر جاوی اس سوال کے معنے بالتفصیل یہہ ہین کہ فرض کرو نہایت ہی پتلی نلی ہو اور وہ دو نقطون کو وصل کرتی ہو اور ورنی ذرہ اس نلی کے اندر پہسلے تو ہم کو

یہہ دریافت کرنا منظور ہی کہ اس ذرہ کی اترنے کا وقت نہایت ہی کم ہو اس سوال کا نام اقل الزمان ہے اوسکو اول اول سنہ ۱۶۹۶ع مین برنولی صاحب نے ایجاد کیا تہا اور اوسی کے سبب سے یہہ حساب تغیرات کا ایجاد ہوا -

ہم فرض کرتے ہین کہ خط مطلوب ایک سطح عمودی مین واقع ہوتا ہے اور اس سطح مین دو معلوم نقطے ہین اور فرض کرو کہ محور د کا عمود وار اندازہ کیا جاتا ہی اور محور مذکور ایسا مقرر کرو کہ وہ او پ کے نقطے پر گذری اور ذرہ حالت سکون سی متحرک ہوتا ہوا فرض کیا گیا ہے

اصول علم ادوات کے موافق عمق د مین گرنے سی ذرہ کو رفتار $\sqrt{۲\,\text{فس}\,د}$ (شرح کشش ف) پس وقت اترنے کا $\int \frac{\sqrt{(1+ع^2)}}{\sqrt{۲\,\text{فس}\,د}}\,زلا$ پس ہم یہہ مقرر کر سکتے ہین کہ

$$مو = \frac{\sqrt{(1+ع^2)}}{\sqrt{د}}$$

یہان مو مین د اور ع ملتف ہین پس بموجب دفعہ ۲۷۴ کے حد غائی کی لئے یہہ ہونا چاہئی کہ $مو = ع\,و\,ع + س$

یعنے
$$\frac{\sqrt{1+ع^2}}{\sqrt{د}} = \frac{ع^2}{\sqrt{\left[د(1+ع^2)\right]}} + س$$

اسواسطے
$$س = \frac{1}{\sqrt{\left[د(1+ع^2)\right]}}$$

اسی معلوم ہوا کہ $د\,(1+ع^2)$ = ایک مقدار مستقل = ۲ط کے فرض کرو

اسواسطے $ع^2 = \frac{۲ط - د}{د}$

اسواسطے $\frac{زلا}{زد} = \left(\frac{د}{۲ط - د}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{د}{\sqrt{(۲طد - د^2)}}$

اسواسطے $لا = ط\,جع^{-1}\frac{د}{ط} - (۲طد - د^2)^{\frac{1}{2}} + ص$ اسمین ص ایک اور مقدار مستقل ہے

اس سے ثابت ہوتا ہے کہ خط منحنی مطلوب خط تدویری ہی جسکا قاعدہ افقی ہے اور جسکا راس نیچے ہی اور قرن او پ کے نقطہ پر ہے ہم مبدء کو او پ کے نقطہ پر فرض کر سکتے ہین

لو لا. = . پس ص = .

یہان $\text{ھ}_1 - \text{ھ}_0 = \left[\frac{\text{ع فر د}}{\sqrt{(1+\text{ع}^2)}}\right]_1 - \left[\frac{\text{ع فر د}}{\sqrt{(1+\text{ع}^2)}}\right]_0$

$= \frac{1}{\sqrt{(2\text{ط})}}\left[(\text{ع فر د})_1 - (\text{ع فر د})_0\right]$

اور اب ہم طرفین کے نقطونکو قایم فرض کرتے ہین تو فر د ۱ اور فر د . معدوم ہوتے ہین اور اسواسطے ھ ۱ – ھ . بہی معدوم ہوتی ہے

مقدار مستقل ط اس شرط کے سبب سے دریافت ہوتی ہی کہ خط تدویر نیچے کے نقطہ معلوم پر گدزتا ہی

لیکن فرض کرو کہ صرف نیچے کے نقطہ کا محدد معلوم ہی اور معین ہنین معلوم تو موافق سابق کے ھ . معدوم ہوتا ہے ھ ۱ = $\frac{(\text{ع فر د})_1}{\sqrt{(2\text{ط})}}$ اب فر د ۱ اختیاری ہے

اب ع ۱ = . کے ہونا چاہئی تا کہ ھ ۱ معدوم ہو پس مماس خط تدویر کا نیچے کے حد بنانے والے نقطہ پر افقی ہوگا اس صورت مین یہہ شرط مقدار مستقل ط کی دریافت کرنیمین بکار آمد ہے

(۳۵۴) اب اس سوال کی یون ترمیم کرتے ہین کہ ذرہ حالت سکون سے متحرک ہنین ہوا بلکہ وہ برفتار معین متحرک ہوا ہی اس صورت مین ہم یہہ ہنین فرض کرتے کہ محور لا کا اوپر کے نقطہ مین گدزتا بلکہ محور لا ایسا مقرر کرتے ہین کہ اوسپر سے جو نقطہ معین بالا تک گرنے مین رفتار حاصل ہو وہ وہ رفتار ہو جو ذرہ کو چلنے کے وقت حاصل ہی باقی حل وہی رہتا ہی جو سابق مین تہا لیکن قرن خط تدویر کا اوپر کے نقطہ معین پر نہین ہوگا بلکہ محور لا کے اندر ہوگا

(۳۵۵) دو نقاط معین کو وصل کرتا ہوا خط ایسا دریافت کرو کہ اس خط اور اوسکی لف اور نصف اقطار انحناء جو اوسکے اطراف سی بہیجے جائین ان سب کے درمیان رقبہ کم از کم ہو بموجب دفعہ ۷۵ اکے صورت بیانیہ جو حد غائی کی رکہے وہ یہہ ہے،

$\text{لا}\frac{\text{لا}}{\text{لا}}\,\text{مع}\ \frac{(1+\text{ع}^2)^2}{\text{ق}}\ \text{ز لا}$

یہان سومین ع اور ق ملتف ہوتا ہی اور اسیواسطی بموجب دفعہ ۳۵۰ کی حد غای کلمی کی
واسطی ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

سو = فوق + س۱ ع + س۲

یعنی (۱+ع۲)۲ / ق = − (۱+ع۲)۲ / ق ق + س۱ ع + س۲

اسواسطی (س۱ ع + س۲) / (۱+ع۲)۲ = ۲

کلی لینے سے

س۱ مستل ع + (س۱ ع − س) / (۱+ع۲) = ۲لا + س۱ ... (۱)

نیز (س۱ ع۲ + س۲ ع) / (۱+ع۲)۲ ق = ۲ع

اسواسطے کلی لینی سے

س۱ مستل ع − (س۱ ع + س۲) / (۱+ع۲) = ۲ی + مقدار مستقل

س۲ کو طرفین مساوات پر زیادہ کرو تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا

س۱ مستل ع + ع(س۲ ع − س۱) / (۱+ع۲) = ۲ی + س۲ ... (۲)

مستل ع کو (۱) اور (۲) سے ساقط کرو تو

(س۲ ع − س۱)۲ / (۱+ع۲) = ۲س۱ ی − ۲س۱ لا + س۲ س۱ − س۱ س۱ ... (۲)

اسواسطے

۱/۲ (۱+ع۲) = (س۲ ع − س۱) / ۱/۲ (س۲ ی − س۱ لا + ب)

اسمین ب ایسا ہی کہ ۲ب = س۲ س۱ − س۱ س۳
فرض کرو کہ صوطول قوس خط منحنی کا ایک نقطہ معین سے اندازہ کیا جای تو آخر مساوات کی
کی کلی لینے سے ہم کو یہہ حاصل ہوگا

صو + س = ۱/۲ (س۲ ی − س۱ لا + ب)

اس سے ثابت ہوتا ہے کہ خط منحنی خط تدویر ہوتا ہے دفعہ ۲۷ دیکھو

اب ہم صورت بیانیہ ھـ ا ـ ھـ . کا امتحان کرین . تو یہہ حاصل ہے کہ

ھـ ا = فر د ا (عو ـ ریفہ/رلا) ا + فرع ا فو ا

ھـ . = فر د . (عو ـ ریفہ/رلا) . + فرع . فو .

اطراف کے نقطہ معین فرض کئے گئے ہین تو فر د ا اور فر د . معدوم ہوتی ہین پس کہ

ھـ ا = فرع ا فو ا اور ھـ . = فرع . فو .

فرض کرو کہ ہم یہہ شرط لگائین کہ خط مطلوب کے جو مماس اطراف کے نقطون سی نکالے جائین تو اونکی ایک سمت مقرر ہوتی ہے پس فرع معدوم ہوتے ہی اور ھـ ا ـ ھـ . معدوم ہوتی ہین اس صورت مین خط تدویر کا ان شرائط سے دریافت ہونا چاہئی کہ وہ دو نقاط معلوم پر گذرے اور ان نقطون سے جو اوسکے مماس سے نکالی جائین اونکی سمت معین ہون لیکن اگر کوئی شرط ع کی قیمتون کے ساتھہ حدود غای پر نہ لگائی جای تو ہمکو یہہ حاصل ہونا چاہیے کہ فو ا = ۰ اور فو . = ۰ تاکہ ھـ ا ـ ھـ . معدوم ہو جاے

اب فو = (۱+ع^۲)^۲ / ن^۲ اور نصف قطر انحنار = (۱+ع^۲)^(۳/۲) / ن

پس ضعف قطر نقاط اطراف پر معدوم ہویے خط تدویر ان نقاط پر قرن رکہی

(۳۵۶) اوس مجسم مستدیر کی صورت دریافت کرو کہ جسکو مایع مین متحرک کرین تو اوسکا مقابلہ یہہ مایع نہایت ہی کم از کم کری اور مسئلہ مقابلہ کا حسب معمول تسلیم کر لیا گیا ہے محور لا کو محور حرکت مقرر کرو پس مسئلہ مقابلہ کو تسلیم کرو اوسکا بیان علم آب کی کتابون مین ہوتا ہے پس صورت بیانیہ جو حد غای کمی کی رکہی یہہ ہوگی

$$\int \frac{ی ع^3}{1+ع^2}\, رلا$$

یہان مو مین ی اور ع ملتف ہین اور اسواسطے بموجب دفعہ ۳۳۷ کے حد غای کمی کے واسطے یہہ حاصل ہونا چاہیے کہ

مو = عو ع + س

یعنے $\frac{د ع^{۴}}{ر + ع^{۲}} = \frac{۳ ع^{۳} + ع^{۵}}{۲(۱ + ع^{۲})^{۲}} + س$

اسواسطے $\frac{۲ د ع^{۳}}{(۱ + ع^{۲})} + س = ۰$

یہہ مساوات جزئی ہے خط منحنی مطلوب کی تشخیص ہوتا ہے

+ کلیان جنکی حدود غائی متغیر ہوتی ہین

(۳۰۵) ہم نے نہایت توضیح اور تصریح کے ساتھہ اوس کلیہ کا بیان کر دیا جسنے کہ حد غائی کی زیادتی یا کمی کی اوس حالت مین دریافت ہوتی ہے کہ اوسمین ایک مقدار متغیر متبوع ملتف ہو اور کل کی حدود غای مستقل ہون اب ہم سوال مذکور کو توسیع دیتی ہین اور کلی کی حدود غائی کو متغیر ٹہیرا کر ہم دیکھتی ہین کہ کیا مشکل پیدا ہوتی ہے

مثلاً فرض کرو کہ ہم کو ایک سطح عمودی معلوم مین دو خطوط منحنی معلوم ہین اور ہم کو مطلوب یہہ ہے کہ ایک خط منحنی جسپر کوئی ذرہ نہایت کم وقت مین اترجای ایک خط منحنی سی دوسرے خط منحنی تک دریافت کرین اور ذرہ اوس قوتسے متحرک ہوتا ہے جو ایک خط مستقیم مین گرنے سے اوسکو حاصل ہوتی ہے یہان ہم کو ایک نقطہ ایسا دریافت کرنا ہے جسپر سے ذرہ اوپر کے خط منحنی کو چھوڑتا ہی دوسرا نقطہ وہ معلوم کرنا ہے جسپر کہ نیچے کی خط پیر ذرہ پہونچتا ہے اور وہ رستہ دریافت کرنا ہے جو یہہ ذرہ طے کرتا ہے اسلئے ہم کو نیچے زیادہ اوپر کے مثالونکی نسبت کرنا چاہئے اب ہم یہہ بیان کرتی ہین کہ ہم کو کیا عمل کرنا چاہئے جو کچھہ اوپر بیان ہوا ہے اوسے ہم کو یہہ معلوم ہی کہ خط منحنی خط تدویر ہوگا جسکا قاعدہ افقی اور قرن معلوم خط مستقیم افقی پر ہوگا اسواسطے کہ فرض کرو کہ ایک اوپر خط منحنی اوپر کے خط منحنی کی کسی نقطہ سی نیچے کے خط منحنی کی کسی نقطہ تک کھینچا گیا ہے یہہ خط منحنی کم از کم وقت کا نہین ہوسکتا اسواسطے کہ ہم اس بات کو جانتے ہین کہ تعبیر نقاط اطراف بدلنی کی ہم لیلیے خط منحنی کم وقت کا بہ نسبت اسی خط منحنی کے دریافت کرسکتے ہین یعنے ایک خط تدویر جسکا قاعدہ افقی ہو اور قرن اوسکا خط افقی معلوم پر ہو چونکہ ہم اس بات کو جانتی ہین کہ

کہ خط منحنی مطلوب خط تدویر ہوتا ہے اصلی سوال کا وہ حصہ جو حساب تغیرات پر موقوف تہا حل
ہوگیا اور موافق قاعدہ معمولی حد غائی زیادتی یا کمی کے ہم اوس خط تدویر کا مقام دریافت
کر سکتے ہین جبکہ دقت حد غائی کمی کی رکہتا ہے حقیقت مین ابتدا اور انتہا کی نقطی اختیاری
ہین تو ہم مساوات اوس خط تدویر کی دریافت کر سکتے ہین جو ان نقاط پر گذری تو دقت اترنے
کا جملہ معلوم محددین نقاط ابتدائی اور انتہائی کا ہوگا تو ہم کو یہہ دریافت ہو جائیگا کہ محددین
کی کن قیمتون کے موافق دقت حد غائی کمی رکہتا ہے ــ

(۳۵۸) دفعہ گذشتہ مین ہم نے ثابت کیا ہے کہ یہہ کچہہ قطعی ضرور نہین کہ کوئی ترمیم
ہم صورت قانونیہ مین کرین تاکہ وہ صورت اوسکے اندر داخل ہوجای جسمین حدود
غائی کلی تبدیل ہونے کی قابلیت رکہتے ہین کیونکہ جو عمل ہم نے دیکہا ہے اوسکو علم
حساب الجزئیات کی قواعد معمولی کے ساتہہ شامل کرین تو اوس سے ہر ایک مثال حل
ہوجائیگی یہہ تسہیل مطلب کے لئے مناسب معلوم ہوتا ہے کہ ایسے مثالونکی حل کرنیکے واسطے
جو کچہہ کرنا ضرور ہوا اونکو یکجا لکہہ دین اسلئے ہم اصل صورت قانونیہ مین جو ترمیم ضروری ہے
اوسکو بیان کرتے ہین موافق سابق کے فرض کرو کہ

$$\text{لو} = \int_{\text{لا.}}^{\text{لا}_1} \text{مو ز لا}$$

فرض کرو کہ علاوہ اس تبدل کے کہ ی بدل کر ی + فری ہوجاتا ہے حدود غائی لا۱
اور لا. بدل کر لا۱ + ز لا۱ اور لا. + ز لا. ہوجائین بسبب ان حدود غائی کے بدلنے
کے تو یہہ زیادتی ہوتی ہے کہ

$$\int_{\text{لا.} + \text{ز لا.}}^{\text{لا}_1 + \text{ز لا}_1} \text{مو ز لا} - \int_{\text{لا.}}^{\text{لا}_1} \text{مو ز لا}$$

یعنی زلا۱ اور زلا. کے مجذور اور قوای اعلی کو چہوڑ دو تو یہہ زیادتی ہوتی کہ

$$\text{مو}_1 \text{ ز لا}_1 - \text{مو. ز لا.}$$

اگر ہم اس کو معلوم صورت بیانیہ کی ساتہہ جو فرلو کے واسطے ابہی لکہی ہے شامل کرین تو ہم کو

کامل تبدل لو کا جو بہ سبب تغیر ی کے اور تغیر حدود غای کی ہو معلوم ہو جایگا۔

(۲۵۹) اگر محددین کے حد بنانے والی قیمتون کے ساتھہ کوئی شرط لگائی جائی تو ارقام زائد جو ابھی یہہ حاصل ہوئین ہین کہ

مو۱ زلا۱ ــ مو. زلا.

ضرور اس بات کے فرض کرنے سی معدوم ہو جائیگی کہ مو۱ = ۰ اور مو. = ۰ پس ۱ ادن مساواتون نکے جو ھ۱ ــ ھ. = ۰ سی حاصل ہوتی ہین یہہ اوپر کی دو نئی اور مساواتین زیادہ ہونگین اور دو نئی مقادیر لا. اور لا۱ کی قیمت بہی دریافت کرنی ہو گی ایک صورت کثیر الوقوع یہہ ہے کہ حد بنانی والی قیمتین معلوم مساواتون کی شرائط کو پورا کرتی ہین ایسی صورت کا بیان ہم نے دفعہ ۲۵۰ مین کیا ہے جسمین کہ ایک خط منحنی ایسا مطلوب ہے کہ جسکے نقاط اطراف دو خطوط منحنی معلوم پر واقع ہون۔

اب ہم کلی کی حد غای کا بیان کرتے ہین اوسمین مقادیر کے تمیز کرنیکے واسطے ہم انیچے لگادیگے فرض کرو کہ ی = د + فر د

پس اگر یہان حد غائی مین تغیر نہوتا تو مقادیر متغیر کی انتہا کی قیمتین لا۱ اور د۱ پہلے تغیر سے اور لا۱ اور ی۱ بعد تغیر کے ہونگی لیکن اگر لا۱ بدل کر

لا۱ + زلا۱ ہو جاوی تو ی۱ بدل کر

$$\left\{ ی + \frac{ز ی}{ز لا} زلا_۱ + \frac{۱}{۲} \frac{ز^۲ ی}{ز لا^۲} (زلا_۱)^۲ + \cdots \right\}_۱ \text{ ہوگا}$$

یعنے زلا۱ کی دوسری قوت اور اس سی اعلی درجہ کی قوتونکو خارج کردین تو وہ بدل کر

$$ی_۱ + \left(\frac{ز ی}{ز لا}\right)_۱ زلا_۱$$ ہوگا یعنے حاصل ضرب ر ع۱ زلا۱ بدل کر

$$ی_۱ + فر د_۱ + \left(\frac{ز ی}{ز لا}\right)_۱ زلا$$ ہوگا فرض کرو کہ ارتباط معلوم جسنے انتہا کی قیمتونکی شرائط پوری ہوتی ہین یہہ ہی کہ

ی = مج (۷)

تو یہہ بھی ہونا چاہئی کہ $ی_۱ = ھج(لا_۱)$

اور نیز $ی_۱ + فری_۱ + \left(\frac{زی}{زلا}\right)_۱ زلا_۱ = ھج(لا_۱ + زلا_۱) = ھج(لا_۱) + ھَج(لا_۱)\, زلا_۱$

اول مرتبہ تک پس

$$فری_۱ = \left[ھَج(لا_۱) - \left(\frac{زی}{زلا}\right)_۱\right] زلا_۱$$

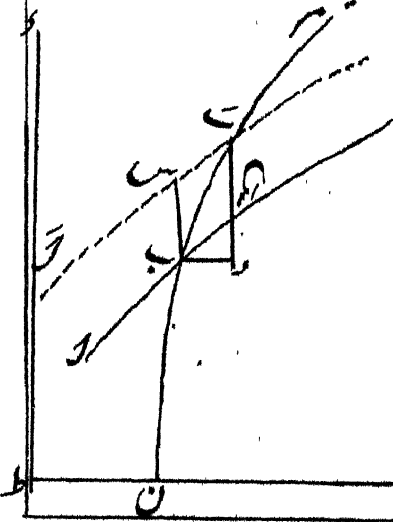
اس سی ارتباط فری۱ اور زلا۱ کے درمیان معلوم ہوتا ہی پس اینن سی ایک کو کامل قیمت فرلو مین سے ساقط کرسکتے ہین -

اور اسی طرح ارتباط درمیان فری. اور فرلا کی دریافت ہوتا ہے

سوالات علم ہندسہ مین $\left(\frac{زی}{زلا}\right)$ مماس زاویہ میلان محور لا اور اوس خط مستقیم کا ہے جو خط منحنی مطلوب کو مس حد کی نقطہ پر کرتا ہے اور $ھَج(لا_۱)$ مماس زاویہ میلان محور لا اور خط مستقیم کا ہے جو مماس خط منحنی کا اوس نقطہ پر ہے

ایک خاص صورت تبلائی جاتی ہی وہ بعض اوقات فری بکار آمد اور فائدہ مند ہوتی ہی فرض کرو کہ تبدل کامل ی۱ کا صفر ہے تو اس سے یہہ حاصل ہوگا کہ $فری_۱ + \left(\frac{زی}{زلا}\right)_۱ زلا_۱ = ۰$ اسیطرح اگر ی. کا تبدل کامل صفر ہو تو $فری. + \left(\frac{زی}{زلا}\right). زلا. = ۰$

(۳۶۰) ہم دفعہ گذشتہ کی توضیح شکل سے کرتے ہین

فرض کرو کہ اب خط منحنی مطلوب ہے اور م ب ل خط منحنی معلوم ہے جسکی طرف ب پر خط منحنی مطلوب واقع ہوتا ہی اور ہر معین ی. کو فرکی تغیر لگانی سی جو خط منحنی اَبَ سی کھینچی اوسکو اَبَ سی تعبیر کرو ب س اور بَ سَ د متوازی محور کے کھینچو اور ب د متوازی محور لا کا تو آخر کو

ب س = فر ۱ اور ب د = زلا ۱ اور ب د = جج (لا ۱) زلا ۱ اور س د = (ر ی / زلا) ۱ زلا ۱
اس سے معلوم ہوا کہ ت س = [جج (لا ۱) − (ر ی / زلا) ۱] زلا ۱ پس ہندسیہ معنی مجازی
عمل کے یہہ ہین کہ اعلی درجہ کی مقادیر کو رد کرین اور اونسے کم درجہ کی مقادیر کو قایم رکہین
تو ت س = ب س آخر کو ہوگا —

(۱ ۶ ۳) اب وہی صورت سوال قلیل الزمان کا بیان کرتی ہین کہ جسکا ذکر دفعہ ۳۵۷ مین
ہوا ہے طریقہ کتابت وہی اختیار کرو جو دفعہ ۳۵۳ مین مذکور ہے پس
فرلو = مو ۱ زلا ۱ − مو . زلا [ع فر ی / ی (۱ + ع ۲) ۲/۱] − [ع فر ی / ی (۱ + ع ۲) ۲/۱] .
+ لا ۱ / لا مح (نہ − ز ع ی / زلا) فر زلا
موافق سابق کے مساوات نہ − ز ع ی / زلا = ۰ سے ہم یہہ استنباط کرتی ہین
ی (۱ + ع ۲) ۲/۱ = (۲ ط) ۲/۱
پس فرلو = مو ۱ زلا ۱ − مو . زلا ۱ / (۲ ط) ۲/۱ [(ع فر) ۱ − (ع فر) .]
فرض کرو کہ مساوات خط منحنی کی جس سے کہ ذرہ حرکت شروع کرتا ہے ی = ہر (لا)
ہے اور مساوات خط منحنی معین جسپر کہ ذرہ حرکت کرکے پہونچیگا ی = جج (لا) ہے
تو بموجب دفعہ بالا کے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ
فر ی ۱ = [جج (لا) − ع] ۱ اور فر ی . = [ہر (لا) − ع] . لا .
پس قیمت فرلو کی اس صورت مین لکہی جاسکتی ہے
فرلو = لر ۱ زلا ۱ − لر . زلا .
اسمین لر ۱ = مو ۱ + ع / (۲ ط) ۲/۱ | جج (لا) − ع ۱ |
= (۱ + ع ۲) / ی ۲/۱ + ع ۱ / (۲ ط) ۲/۱ [جج (لا ۱) − ع ۱]
= ۱ / (۲ ط) ۲/۱ [۱ + ع ۱ جج (لا ۱)]

اور اسیطرح لر. = $\frac{1}{(۲ط)^{۱/۲}}$ [۱ + ع ہھ (لا.)]

چونکہ زلا ا اور زلا. اختیاری ہین فرلو ضرور ہنین کہ معدوم ہو اگر لر ا = ۰ اور لر. = ۰ نہ ہو پس

۱ + ع ہج (لا ا) = ۰ اور ۱ + ع ہھ (لا.) = ۰

اور اس سے ثابت ہوتا ہے کہ خط تدویر دو نو خطوط منحنی کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتا ہے

(۳۶۴) اتبک ہم نے دربردہ اس بات کو تسلیم کرلیا تہا کہ جملہ مو مین حد نہانی والی قیمتین مقادیر متغیر کے یا سر جزویان داخل ہنین اب فرض کرو کہ مو مین لا. و لا ا د. و د ا ع. و ع ا ... داخل ہین

(۱) اول فرض کرو کہ لا. اور لا ا قابلیت کسی تبدل کے ہنین رکہتی اور جب د بدل کر د + فر د ہو جاے تو علاوہ ان تغیرات کی جنکی تحقیقات ہم ابہی کی مو مین ایک تغیر متزاید د. و د ا ... کے تبدل سے جو مو مین بغیر پیچیدگی کے واقع ہوتا ہی پیدا ہو گا ۔

یہہ ارقام متزاید فر مو مین یہہ ہین

$\frac{ر مو}{ر د.}$ فر د. + $\frac{ر مو}{ر د ا}$ فر د ا + $\frac{ر مو}{ر ع.}$ فر ع. + $\frac{ر مو}{ر ع ا}$ ر ع ا + ...

اور اسی سبب سے ارقام متزاید فر ی مین یہہ واقع ہوتے ہین

$\int_{لا.}^{لا ا}$ [$\frac{ر مو}{ر د.}$ فر د. + $\frac{ر مو}{ر د ا}$ فر د ا + $\frac{ر مو}{ر ع.}$ فر ع. + $\frac{ر مو}{ر ع ا}$ فر ع ا + ...] زلا

اب فر د. و فر د ا و فر ع. و فر ع ا ... جملے متغیر لا کے بنی لیکن لا کی حد نہانی والی قیمتونکی جملے مین اسواسطے ان مقادیر کو کلی کی علامت سے باہر لا سکتے ہین اور ارقام متزاید کو اسطرح لکہہ سکتے ہین کہ

فر د. $\int_{لا.}^{لا ا}$ $\frac{ر مو}{ر د.}$ زلا + فر د ا $\int_{لا.}^{لا ا}$ $\frac{ر مو}{ر د ا}$ زلا + فر ع. $\int_{لا.}^{لا ا}$ $\frac{ر مو}{ر ع.}$ زلا + ...

ان ارقام متزاید کے واقع ہونی سے اس دفعہ ۳۴۳ کے استدلال مین کچہہ خلل ہنین واقع ہو گا اور یہہ ضرور ہو گا کہ ک = ۰ کے تاکہ لو کے واسطے حد غای زیادتی یا کمی کی حاصل ہو

یہہ ارقام متزاید صورت بیانیہ ھـ۔ ا ھـ۔ ساتھہ متعلق ہوسکتی ہین اور کل معدوم
ہوجائینگی چونکہ یہہ فرض کیا گیا ہے کہ ارتباط لا اور ی کا دریافت ہوگیا ہے اصلی مساوات
ک = ۔ صورت بیانیہ جو علامت کلی کی ماتحت ہین ان ارقام متزاید مین محدود جملے
ہوکے ایسے ہو جائینگے کہ کلیان جو وہان بیان ہوئین ہین اقل درجہ یہہ ہے کہ نظریات مین
نقل آئین

(۱) فرض کرو کہ لا۔ اور لا۱ بھی بدل گئی اور وہ بدل کر لا۔ + ز لا۔ اور لا۱ + ز لا۱ بن گئے
تو ہو مین یہہ متزاید زیادتی ہوتی ہے کہ

[ر ہو / ر لا۔] ز لا۔ + [ر ہو / ر لا۱] ز لا۱

اسمین ر ہو / ر لا۔ اور ر ہو / ر لا۱ کامل سرحزیان ہین یعنے ہم یہہ یاد رکھین کہ لا۔ پیچیدگی کے
ساتھہ ی۔ و ع۔ ۔ ۔ مین واقع ہوتا ہے اور علی ہذا القیاس لا۱ کی کیفیت ہے
پس علاوہ ان ارقام متزائد کے جو ابھی ہمنے لکھی ہین فرو کو یہہ زیادتی حاصل ہوگی کہ

ر لا۔ لا۔/لا۔ مع [ر ہو / ر لا۔] ز لا۔ + ر لا۱ لا۱/لا۱ مع [ر ہو / ر لا۱] ز لا۱

اور یہہ صورت بیانیہ اوس مجموعہ کے ساتھہ شامل ہوسکتی ہے جو ھـ۔ ا ھـ۔ اور ارقام
متزائد سے نبتا ہے

(۳۶۳) مثال کے واسطے ہم سوال قلیل الزمان مین پھر کچھہ ترمیم کرتے ہین فرض کرو
کہ دو خطوط منحنی ایک ہی سطح عمودی مین واقع ہین اور مطلوب ہے کہ ایک خط منحنی جسپر
بہت جلد چیز اوتر آئے ان خطوط منحنی معلوم مین سے ایک خط منحنی سے دوسرے خط منحنی تک دریافت
کرین اور حرکت اول خط منحنی سے شروع ہوتی ہے
فرض کرو کہ محور ی کا عمود وار نیچے کی طرف پیمایش کیا جاوے اور ی۔ معین اوس نقطہ کا ہے
جہان سے حرکت شروع ہوتی ہے پس جب معین ی ہے تو رفتار [۲ ش (ی - ی۔)] ہے
پس یہہ ہم کو لینا چاہئے کہ

لو = لا۱مع لا۰ ۲√(۱ + ع۱) / ۲√(ی - ی۰) زلا

پس دفعہ ۳۰۶۱ کے حل مین ی کو ی - ی۰ سے

بدلنا چاہئے اور فرلو جو صورت بیانیہ لکہی ہے اوسپر ارقام دفعہ ۳۶۲ کو زیادہ کرنا چاہئے

یہان لو = لا۱مع لا۰ ۲√(۱ + ع۱) / ۲√(ی - ی۰) پس ی۰ صرف حد بنانی والی قمیت ہے جو مومین واقع

ہوتی ہے اسواسطے اول پر ہم یہہ زیادہ کرتے ہین کہ

فری۰ لا۱مع لا۰ زمو/زی۰ زلا + زلا۰ لا۱مع لا۰ [زمو/زلا۰] زلا

اور زمو/زلا۰ = زمو/زی۰ (زی/زلا)۰.

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ بموجب دفعہ ۳۶۱ کے ک = ۰ رکہتی کے بعد ہم کو یہہ حاصل

ہوتا ہے کہ فری = لر۱ زلا۱ - لر۰ زلا۰ + [زی۰ + (زی/زلا)۰ برلا۰] لا۱مع لا۰ زمو/زی۰ زلا

اسمین لر۱ اور لر۰ قمیتین معین دفعہ ۳۶۱ کی رکہتی ہین -

اب اس صورتمین

زمو/زی۰ = - زمو/زی = - نہ = - زعو/زلا

اسواسطے لا۱مع لا۰ زمو/زی۰ زلا = عو۰ - عو۱ = (ع۰ - ع۱) / ۲√(۲ط)

اور فری۰ + (زی/زلا)۰ زلا۰ = ھر (لا۰) زلا مثل دفعہ ۳۶۱

پس فرلو = لر۱ زلا۱ - لر۰ زلا۰ + ھر(لا۰) / ۲√(۲ط) (ع۰ - ع۱) رلا۰

= ۱ / ۲√(۲ط) [۱ + ع۱ ھجَ (لا۱)] زلا۱

- ۱ / ۲√(۲ط) [۱ + ع۱ ھرَ (لا۰)] زلا۰

زلا۱ اور زلا۰ کی امثال کو برابر صفر کے لکہنے سے یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

۱ + ع۱ ھجَ (لا۱) = ۰ اور ۱ + ع۱ ھرَ (لا۰) = ۰

پس ھرَ (لا۰) = ھجَ (لا۱)

اس سے ثابت ہوا کہ خط تدریجی کے خط منحنی قائم کو قایمی زاویون پر قطع کرتا ہے اور

اوپر کے خط منحنی قایم مماس نقطہ ابتدای پر متوازی ہی خط منحنی زیرین کے اوس مماس کا ہی جو نقطہ
انتہائی سے کھینچا جاوے

کلیات جنمین دو مقادیر متغیرین

(۳۶۴) اتبک ہم نے یہہ فرض کیا تھا کہ ی جملہ ایک مقدار متغیر تابع کا ہے اب فرض
کرو کہ مو جملہ دو مقادیر متغیر تابع کا ہے

فرض کرو کہ مو ایک جملہ لا اور ی اور ے کا ہے اور سر جزویان ی اور ے کی بلحاظ لا کی یہہ
ہین کہ $\text{لو} = \int_{\text{لا}.}^{\text{لا}_1} \text{مو ز لا}$

اب ہم کو یہہ دریافت کرنا چاہیے کہ ی اور ے مین جو تبدل پیدا کئی جائین اونسے لو کی قیمت
مین تغیر ہوتا ہے -

دفعہ (۳۴۲) کی طرح عمل کرنے سی ہم کو نتیجہ ہاتھہ لگا کہ

$$\text{فر لو} = \text{ھـ}_1 - \text{ھـ}_. + \text{حی}_1 - \text{حی}_. + \int_{\text{لا}.}^{\text{لا}_1} (\text{ک فر ی} + \text{ل فر ے}) \text{ ز لا}$$

ان مین رموز کے معنے یہہ ہین کہ

فر ی موافق سابق ایک اختیاری تغیر کو جو ی مین پیدا کیا جای تعبیر کرتا ہے یعنی فر ی نہایت ہی
چھوٹا اختیاری جملہ لا کا ہے

ک موافق سابق کے

$$\frac{\text{ز مو}}{\text{ز ی}} - \frac{\text{ز}}{\text{ز لا}} \frac{\text{ز مو}}{\text{ز ی}'} + \frac{\text{ز}^2}{\text{ز لا}^2} \frac{\text{ز مو}}{\text{ز ی}''} - \dots$$ کو تعبیر کرتا ہے

اسمین $\frac{\text{ز مو}}{\text{ز ی}}$ ، $\frac{\text{ز مو}}{\text{ز ی}'}$ و $\frac{\text{ز مو}}{\text{ز ی}''}$ . . . سر جزوی بالا جزا ہین

اور $\frac{\text{ز}}{\text{ز لا}}$ ، $\frac{\text{ز}^2}{\text{ز لا}^2}$ . . . سر جزویان کامل بلحاظ لا کے ہین

فر ے اختیاری تغیر ہی جو ے مین پیدا کیا جای یعنے فر ے نہایت چھوٹا اختیاری جملہ لا کا
ل وہی تعلق ے سے رکھتا ہے جو ک تعلق ی سے رکھتا ہے یعنی

$$\text{ل} = \frac{\text{ز مو}}{\text{ز ے}} - \frac{\text{ز}}{\text{ز لا}} \frac{\text{ز مو}}{\text{ز ے}'} + \frac{\text{ز}^2}{\text{ز لا}^2} \frac{\text{ز مو}}{\text{ز ے}''} - \dots$$

ھـ ا ـ ھـ ، معنی ابھی بیان کئی گئے ہین اور حی ا ـ حی ، وہی تعلق سے سے رکہتاہے
جو ھـ ا ـ ھـ ، تعلق ء سے رکہتاہے

(۲۶۵) دفعہ بالاکے فرضونکے موافق لو کی قیمت حد غائی زیادتی یا کمی کی دریافت کرتے ہین ـ

(۱) اگر ء اور سے متعلق ہون تو فر لو کے معدوم ہونے کی واسطی ضروری کہ ک = ۰ اور ل = ۰
اور نیز ھـ ا ـ ھـ ، + جی ا ـ حی = ۰

قیمتین ء اور سے کی ارقام بالامین مساوات جزئیہ ک = ۰ اور ل = ۰ کی حل کرنیسے دریافت ہونگین اور مقادیر مستقلہ اختیاری جو ان حلون مین واقع ہون وہ اسطرح دریافت ہو سکتی ہین کہ مقادیر اختیاری فر ء ، اور فر ء ا و (فر زلا/زلا) ، و ، فر سے د فر سے ا و (فر زسے/زلا) ، ، جو ھـ ا ـ ھـ ، + جی ا ـ حی ، مین واقع ہوتی ہین اونکی مثال کو برابر صفر کے لکہین ـ

(۲) فرض کرو کہ لو ا ء سے آپسمین بے تعلق نہین بلکہ اونمین یہہ ارتباط ہے کہ
مج (لا و ء و سے) = ۰ اور یہہ ارتباط ہمیشہ مستحکم رہتاہی اسلئی ہم کو یہہ حاصل ہوتاہے کہ

مج (لا و ء + فر ء و سے + فر سے) = ۰

اور اسیواسطے آخر کو

$$\frac{ز مج}{ز ء} \text{ فر ء} + \frac{ز مج}{ز سے} \text{ فر سے} = ۰$$

پس کلی لاامع (ک فر ء + ل فر سے) زلا کے

$$\text{لاامع} \left[ک - \frac{ل \frac{ز مج}{ز ء}}{\frac{ز مج}{ز سے}} \right\} \text{فر ء زلا ہو جائیگی}$$

اب تاکہ یہہ معدوم ہو تو فقط یہہ اکیلی شرط ہوگی کہ

$$\frac{ک}{\frac{ز مج}{ز ء}} = \frac{ل}{\frac{ز مج}{ز سے}}$$

اس مساوات جزئی کو مج (لا و ی و ے) = سے شامل کرکے ہم ی اور ے کو دریافت کر سکتے ہین

موافق سابق کے ہم کو یہہ بہی حاصل ہے

ھہ - ھہ ، حی - حی = ۰

(۳۶۶) مثال کے واسطے یہہ سوال لکہتے ہین کہ ایک سطح مستدیر معلوم پر دو نقاط معلوم کے درمیان ایک خط دریافت کرو جسکا طول حد غائی کمی کی رکہے –

یہان ہم کو یہہ معلوم ہے کہ

لو = ∫ مع [۱ + (ری/رلا)^۲ + (رے/رلا)^۲]^½ زلا = ∫ مع (۱ + ی‌َ^۲ + ے‌َ^۲)^½ زلا

پس ک = – (ری/زلا) / (۱ + ی‌َ^۲ + ے‌َ^۲)^½ اور ل = – (رے/زلا) / (۱ + ی‌َ^۲ + ے‌َ^۲)^½

فرض کرو کہ مج (لا و ی و ے) = ۰ مساوات سطح مستدیر کی جسپر خط واقع ہوتے ہین تو بموجب دفعہ گذشتہ کے یہہ شرط حد غائی کمی کے واسطے ہوگی کہ

[ر (ری/رلا) / (۱ + ی‌َ^۲ + ے‌َ^۲)^½] / (رمج/ری) = [ر (رے/رلا) / (۱ + ی‌َ^۲ + ے‌َ^۲)^½] / (رمج/رے)

فرض کرو کہ خط منحنی کے طول قوس کو صو تعبیر کرتا ہے تو

ری/رصو = ی‌َ / (۱ + ی‌َ^۲ + ے‌َ^۲)^½ اور رے/رصو = ے‌َ / (۱ + ی‌َ^۲ + ے‌َ^۲)^½

پس مساوات اوپر کی اسطرح لکہی جاتی ہے کہ

(ر^۲ی/رصو^۲) / (رمج/ری) = (ر^۲ے/رصو^۲) / (رمج/رے) . . . . (۱)

اس سے ہم یہہ قیاس بالقرینہ کرسکتے ہین انمین سے ہر ایک کسر برابر

(ر^۲لا/رصو^۲) / (رمج/رلا) کے ہی

اور اسکو ہم ثابت کرسکتے ہین اسواسطے کہ (۱) مین ہر ایک کسر موافق ایک مشہور مسئلہ جبریہ کی برابر ہے

$$\frac{\frac{\text{ری}}{\text{رضو}}\,\frac{\text{ر۲ی}}{\text{رضو۲}}+\frac{\text{رے}}{\text{رضو}}\,\frac{\text{ر۲ے}}{\text{رضو۲}}}{\frac{\text{ری}}{\text{رضو}}\,\frac{\text{رمج}}{\text{ری}}+\frac{\text{رے}}{\text{رضو}}\,\frac{\text{رمج}}{\text{رے}}}$$

اور چونکہ مساوات مج (لا ی ے) = ۰ خط منحنی کے ہر نقطہ کے واسطے مستحکم ہی تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{رمج}}{\text{رلا}}\,\frac{\text{رلا}}{\text{رضو}}+\frac{\text{رمج}}{\text{ری}}\,\frac{\text{ری}}{\text{رضو}}+\frac{\text{رمج}}{\text{رے}}\,\frac{\text{رے}}{\text{رضو}}=۰$$

اور بموجب مسئلہ معلوم کے

$$\frac{\text{رلا}}{\text{رضو}}\,\frac{\text{ر۲لا}}{\text{رضو۲}}+\frac{\text{ری}}{\text{رضو}}\,\frac{\text{ر۲ی}}{\text{رضو۲}}+\frac{\text{رے}}{\text{رضو}}\,\frac{\text{ر۲ے}}{\text{رضو۲}}=۰$$

اس سے معلوم ہوا کہ ایک خط کم از کم طول کا ان معلوم مساواتون سے مشخص ہوتا ہے کہ

$$\frac{\frac{\text{ر۲لا}}{\text{رضو۲}}}{\frac{\text{رمج}}{\text{رلا}}}=\frac{\frac{\text{ر۲ی}}{\text{رضو۲}}}{\frac{\text{رمج}}{\text{ری}}}=\frac{\frac{\text{ر۲ے}}{\text{رضو۲}}}{\frac{\text{رمج}}{\text{رے}}}\quad\cdots\cdots\ (۲)$$

علم ہندسہ امتداد ثلاثہ کی کتابون مین ثابت ہے کہ (۲) کی مساواتون سے ثابت ہوتا ہے کہ خط منحنی کے کسی نقطہ پر سطح ملصقہ مین سطح مستدیر کا عمود المماس اوس نقطہ پر داخل ہوتا ہی اس خط منحنی کو ہندسہ ارضی کا خط منحنی کہتے ہین

(۳۶۷) دفعہ گذشتہ مین جہان یہہ فرض کیا ہے کہ دو نقاط قایم کے درمیان خط کھینچو وہان فرض کرو ایک نقطہ قایم اور ایک خط منحنی قایم کے درمیان ایک خط کم از کم طول کا کھینچا ہے فرض کرو کہ لا۰ موافق نقطہ قایم کے اور لا۱ موافق خط منحنی قایم کے ہے اب ہم ان ارقام پر خیال کرتے ہین جو ھ۱ + حی۱ سے تعبیر ہوتے ہین دفعہ ۳۶۱ کی طرح ہم کو دریافت ہیگا کہ وہ یہہ ہین

$$\text{مو زلا}_۱+\frac{۱}{\text{مو}_۱}\left(\frac{\text{ری}}{\text{رلا}}\right)_۱\text{فری}_۱+\frac{۱}{\text{مو}_۱}\left(\frac{\text{رے}}{\text{رلا}}\right)_۱\text{فرے}_۱$$

اب چونکہ خط منحنی مطلوب کیطرف خط منحنی معلوم پر واقع ہوتی ہے تو ہم اس طرف پر یہہ فرض کرسکتے ہین کہ دو ارتباط کی شرائط پوری ہونگین کہ

اسواسطے لا + س۲ = √[ط۲ − (س۱ − ی)۲]

اس سے ثابت ہوتا ہے کہ خط منحنی مطلوب قوس مدور ہے

چونکہ اطراف کے نقطے قایم مقرر کئے گئے ہین تو حصہ قرمہ کا جو موقوف اس حد و دعای پر ہوگا

س۰ و م ہوتا ہے

مقادیر مستقل س۱ اور س۲ اور ط التخمین اسطرح ہوتی ہین کہ قوس مدور نقاط قایم مین

گذرے اور اونکے درمیان طول معلوم رکھے۔

(۳۷۰) طول خط منحنی کا معلوم ہے اوسکی ایسی صورت دریافت کرو کہ عمق اوسکے مرکز ثقل کا

حد غای زیادتی کی رکھے

محور لا کو افقی اور محور ی کو عمود وار نیچے کے طرف مقرر کرو اور فرض کرو کہ طول خط منحنی کا ص ہے

تبیہ ہوتا ہے تو عمق مرکز ثقل کا ۱/ص لا ابع ی √(۱ + ع۲) زلا ہی اور طول

لا ابع √(۱ + ع۲) زلا ہے

فرض کرو کہ مو = ۱/ص ی √(۱ + ع۲) + ط √(۱ + ع۲)

پس ہم کو قیمت حد غائی زیادتی یا کمی لا ابع مو زلا کی دریافت کرنی چاہئی

یہان بموجب دفعہ ۳۴۷ کے یہہ حاصل ہونا چاہئے کہ

مو = عو ع + س۱ لیجئے

۱/ص √(۱ + ع۲) + ط √(۱ + ع۲) = ی ع۲ / ص √(۱ + ع۲) + ط ع۲ / √(۱ + ع۲) + س۱

اسواسطی ۱ + ع۲ = (ی + ط ص)۲ / ص۲ س۱۲

اور اسواسطے زلا / زی = ص س۱ / √[(ی + ط ص)۲ − ص۲ س۱۲]

اس سے معلوم ہوا کہ لا = ا لوک [ی + ب + √((ی + ب)۲ − ا۲)] + س۲

اسمین س۲ ایک نئی مقدار مستقل ہے اور ا = ص س۱ اور ب = ط ص

اس مساوات سے ثابت ہوتا ہے کہ خط منحنی مطلوب مجبل ہی اگر خط منحنی مطلوب کے انجام

پس فرض کرو کہ مو = ا - $\frac{لا}{۱۸ (لا^۲ + ی^۲)}$ + ط ی^۲ پس ہمکو قیمت حد غائی زیادتی یا کمی لا ا مع مو لا
کی دریافت کرنی ہے

شرط زن د - $\frac{زن عو}{ز لا}$ + ... = ۰ کا امتحان یہان ہوتا ہے کہ ۰ =

یعنے ۲ ط ی + $\frac{لا}{(لا^۲ + ی^۲)}$ $\frac{ی لا}{لا}$ = ۰

اسواسطے ۲ ط (لا^۲ + ی^۲) $\frac{ی لا}{لا}$ + لا = ۰

اگر حدود غامی لا، ولا، کو فرض کرو کہ ادنین قابلیت تبدل کی ہے تو حد ثانی والی رقمین سے مو، زلا، - مو، زلا، حاصل ہو گی اور انکی معدوم ہونے کے واسطے ہم کو یہہ حاصل ہونا چاہیے مو، = ۰ اور مو، = ۰ اس سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ی، = ۰ اور ی، = ۰ پس مساوات ۲ ط (لا^۲ + ی^۲) $\frac{ی لا}{لا}$ لا = ۰ سے جو کل خط منحنی مقید تحقیق ہوتا ہے محور لا کے گرد اوسکے گردش سے مجسم تناہی اور قیمت ط کی اس شرط سے دریافت ہوتی ہے کہ حجامت معلوم ہی یعنے حجم معلوم ہے

کلی مثناہ

(۳۷۳) اب ہم کلی مثناۃ کی قیمت حد غائی زیادتی یا کمی دریافت کرنی کا سوال حل کرتے ہین اور اوسکو کلی مثناۃ کے تغیر سے شروع کرتے ہین

فرض کرو کہ ے جملہ مقادیر متغیر بے تعلق لا اور ی کا ہے اور وہ بالفعل مجہول ہے اور مو جملہ لا وی وے ~~و زلا ے اور زی ے~~ کا ہے اور لو = $\int^{لا}$ $\int^{ی}$ مو زلا زی کلی اول بلحاظ ی کے فرض کی گئی ہے اور حدود غامی ی، اور ی، جملے لا کے فرض کئے گئے ہین اب یہہ تشخیص کرنا مدنظر ہے کہ ے کونسا جملہ لا اور ی کا ہو کہ ی حد غامی پر زیادتی یا کمی کی رکھی

فرض کرو کہ فے نہایت ہی چھوٹا اختیاری جملہ لا اور ی کا ہے اور فر مو اوس تغیر کو تعبیر کرتا ہے کہ مو مین اوسوقت پیدا ہوتا ہے کہ ے سے تغیر فے کا پیدا ہوتا ہے اور لو کی تغیر کو فر لو تعبیر کرتا ہے تو ہم کو ایک صورت بیانیہ فر لو کے واسطے حاصل کرتی ہے

+ لا^لا امع [(ن فرے)₁ − (ن فرے)₀] زلا

+ (ک۱ امع م فرے زی) لا = لا₁ − (ک امع م فرے زی) لا = لا.

− لا^لا امع [(م فرے)₁ زی₁/زلا − (م فرے)₀ زی./زلا] زلا

اگر حدود غائی اور ی مقادیر مستقل ہون تو ارقام آخر سطر مین معدوم ہوتی ہین

ہم نے یہہ فرض کیا ہے کہ حدود غائی کلی کی قابلیت تبدل کی نہین رکہتین تو ہم اس بات کو آسانی سے دیکہہ سکتے ہین کہ جملہ صورتہاے نہایت فرلو مین ان ارقام کی زیادہ کرنا چاہئے کہ

(زلا ک۱ امع موزی) لا = لا₁ − (زلا ک امع موزی) لا = لا.

+ لا^لا امع (مو₁ زی₁ − مو. زی.) زلا

علم ہندسہ کی استعمالات مین حدود غائیان کلیونکی بلحاظ لا اور ی کے اکثر خط منحنی مقید کے احاطہ سے معلوم ہونگین اس صورت مین ی₁ = ی. اون دونو حالتون مین ہی کہ لا = لا. اور لا = لا₁ اور اسیواسطے ک امع م فرے زلا اور زلا ک امع لوزی معدوم ان دونو صورتونمین ہوتی ہین کہ لا = لا. اور نیز لا = لا₁

(۳۷۴) فرلو کی قیمت جو دفعہ گذشتہ مین دریافت کی ہے اوسمین ایک رقم کلی متناہ جیز فرلو کلی کی علامتونکی اندر ملتف ہی اور بہت سے مفرد کلیان ہین جو فرے کی حد نہائی والی قیمتون پر موقوف ہین دفعہ ۳۴۴ مین جو ترکیب کام مین آتی ہے اوس سے یہہ استخراج ہوتا ہے فرلو یقینی معدوم نہین ہوگا اگر امثال فرے کلی متناہ کے اندر معدوم نہ ہون پس لو کی حد غائی زیادتی کمی کی لئے ایک شرط ضروریہہ ہے کہ

ل − زم/زلا + ز²ن/زلا² − ... = ۰

یہہ مساوات جزی ے کی دریافت کرنے کے واسطے ارقام لا اور ی مین ہے اور ہم یہہ کہہ سکتے ہین کہ جملہ اختیاری جو اس حل مین واقع ہوتا ہی ایسا تشخیص ہونا چاہئے کہ فرلو مین ارقام معدوم ہون لیکن مساوات جزی بالاجزا کی کلی لینی مین ایسی وقت واقع ہوتی ہے کہ عملاً امتحان

ان ارقام کا حدود دغائی پر نہین ہو سکتا

(۳۷۵) مثال فرض کرو کہ سطح مستدیر جو خط منحنی معلوم سی احاطہ ہو ایسے دریافت کرنی ہی کہ وہ حد غائی کمی کی رکھی

یہان بموجب دفعہ ۱۷۰ کے

د = ∫∫ [۱ + (ز ی / ز لا)^۲ + (ز ی / ز و)^۲]^{۱/۲} زلا زد

موافق دستور کے

ز ی / ز لا = ع اور ز ی / ز و = ق اور ز^۲ ی / ز لا^۲ = س اور ز^۲ ی / ز لا ز و = صو اور ز^۲ ی / ز و^۲ = طو

پس حد غائی زیادتی کے شرط کے امتحانی یہہ ہوتی ہین

ز م / ز لا + ز ن / ز و = ۰

یعنے ز / ز لا (ع / (۱ + ع^۲ + ق^۲)^{۱/۲}) + ز / ز و (ق / (۱ + ع^۲ + ق^۲)^{۱/۲}) = ۰

یعنے س (۱ + ق^۲) − (ع س + ق صو) + طو (۱ + ع^۲ + ق^۲) − (ع صو + ق طو) ق = ۰

یعنے (۱ + ق^۲) س − ۲ ع ق صو + (۱ + ع^۲) طو = ۰

امتداد ثلاثہ کے علم ہندسہ مین ثابت ہی کہ اس مساوات سی سطح مستدیر مطلوب تعبیر ہوتی ہے کہ ہر نقطہ پر دوسرے نصف قطر انحنا متحد المقدار اور مختلف العلامت ہین

چونکہ ہم نے سطح مستدیر کے احاطہ کو ایک خط منحنی قایم مقرر کیا ہے اور فرے اس احاطہ کے گرد معدوم ہوتا ہے تو ارقام جو حدود غائی سے مربوط ہین فرلو مین سب معدوم ہوتی ہین

حد زیادتی و کمی کی قیمتوں مین تمیز

اب ہم بعض مثالین لکھینگے جس سے توضیح حد غائی زیادتی اور کمی کی دوسرے جز کی تحقیقات ہوتی ہے دفعہ ۳۳۹ دیکھو

اول مثال پر خیال کرو جسمین دو نقاط معلوم مین سب سے چھوٹا خط دریافت کیا ہے یہان

مو = (۱ + ع^۲)^{۱/۲} اور لو = ∫ مو زلا

فرض کرو کہ د بدل کر د + فرد ہو جای اور اس تبدل کا نتیجہ یہہ ہو کہ ع بدل کر ع + فرع ہو جائے
ع + فرع کو بجای ع کی ؔمین رکہو اور پہیلاؤ تو لو کی یہہ صورت ہو جائیگی

$$(۱ + ع^۲)^{\frac{۱}{۲}} + \frac{ع\ فرع}{(۱ + ع^۲)^{\frac{۱}{۲}}} + \frac{(فرع)^۲}{۲\ (۱ + ع^۲)^{\frac{۳}{۲}}} - \ldots$$

اسمین ارقام جنکا بیان نہین ہوا تیسری درجہ اور تیسری درجہ سی اعلی درجی کی فرع مین ہین

$$فرلو = \int_{لا}^{لا} بع \frac{ع\ فرع}{(۱ + ع^۲)^{\frac{۱}{۲}}} زلا + \frac{۱}{۲} \int_{لا}^{لا} بع \frac{(فرع)^۲}{(۱ + ع^۲)^{\frac{۳}{۲}}} زلا - \ldots$$

ان ارقام مین سی اول رقم وہی ہے جسکو فرلو سی تعبیر کیا تہا اور لو کی تحقیقات حد کمی کی جہانتک اب تک ہوی ہی وہ اسپر مشتمل ہی کہ یہہ رقم معدوم ہو فرض کرو کہ یہہ رقم معدوم ہوتی ہے اور تیسرے اور اوس سے زیادہ درجہ کی رقمونکو خارج کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$فرلو = \frac{۱}{۲} \int_{لا}^{لا} بع \frac{(فرع)^۲}{(۱ + ع^۲)^{\frac{۳}{۲}}} زلا$$

اگر لا۱ - لا مثبت ہی تو ہر یک جز ترکیبی اس کلی کا مثبت ہی پس فرلو مثبت ہی اور اسواسطے لو کی قیمت حد غای کمی کی حاصل ہووے -

۳۷۷ اب وہی صورت سوال قلیل الزمان کی لو جسمین نقاط اطراف قائم ہین یہان

$$\int_{لا}^{لا} بع \frac{(۱ + ع^۲)^{\frac{۱}{۲}}}{د^{\frac{۱}{۲}}} زلا \quad اور\ د =$$

د کو د + فرد سے اور ع کو ع + فرع سے بدلو اور مو کی اس قیمت کو پہیلاؤ تو مو کی یہہ صورت ہوگی کہ

$$\frac{(۱ + ع^۲)^{\frac{۱}{۲}}}{د^{\frac{۱}{۲}}} - \frac{(۱ + ع^۲)^{\frac{۱}{۲}}\ فرد}{۲\ د^{\frac{۳}{۲}}} + \frac{ع\ فرع}{د^{\frac{۱}{۲}}\ (۱ + ع^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$$

$$+ \frac{۳\ (۱ + ع^۲)^{\frac{۱}{۲}}\ (فرد)^۲}{۸\ د^{\frac{۵}{۲}}} - \frac{ع\ فرد\ فرع}{۲\ د^{\frac{۳}{۲}}\ (۱ + ع^۲)^{\frac{۱}{۲}}} + \frac{(فرع)^۲}{۲\ د^{\frac{۱}{۲}}\ (۱ + ع^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

اس سے ہم فرلو کو حاصل کر سکتی ہین — . . . .

اب دفعہ ۳۷۵ کی عمل سی ارقام اول درجہ کی فرلو مین معدوم ہوتی ہین پس تیسری درجہ اور تیسرے درجہ سی زیادہ درجہ کی رقمون کو خارج کرکے یہہ ہم کو حاصل ہوتا ہے کہ

$$فرلو = \int_{لا}^{لا} بع \left[\frac{۳\ (۱ + ع^۲)^{\frac{۱}{۲}}\ (فرد)^۲}{۸\ د^{\frac{۵}{۲}}} - \frac{ع\ فرد\ فرع}{۲\ د^{\frac{۳}{۲}}\ (۱ + ع^۲)^{\frac{۱}{۲}}} + \frac{(فرع)^۲}{۲\ د^{\frac{۱}{۲}}\ (۱ + ع^۲)^{\frac{۳}{۲}}} \right]$$

فرض کرو کہ ے کو ے + فرے سے بدلین اور اس بدلنی کا نتیجہ یہہ ہو کہ ع بدل کر ع + فرع ہو اور ق بدل کر ق + فرق ہو پس مو کی صورت یہہ ہو جائیگی کہ

$$(۱+ع^۲+ق^۲)^{\frac{1}{2}} + \frac{ع\ فرع}{(۱+ع^۲+ق^۲)^{\frac{1}{2}}} + \frac{ق\ فرق}{(۱+ع^۲+ق^۲)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \frac{(۱+ق^۲)(فرع)^۲}{۲(۱+ع^۲+ق^۲)^{\frac{3}{2}}} - \frac{ع\ ق\ فرع\ فرق}{(۱+ع^۲+ق^۲)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(۱+ع^۲)(فرق)^۲}{۲(۱+ع^۲+ق^۲)^{\frac{3}{2}}} + \dots\dots$$

اول مرتبہ کی ارقام کو معدوم سمجھو اور تیسرے اور اعلی مرتبہ کی ارقام کو چھوڑ دو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$فر^۲ د = \frac{1}{2}\int\int \frac{(۱+ق^۲)(فرع)^۲ - ۲\ ع\ ق\ فرع\ فرق + (۱+ع^۲)(فرق)^۲}{(۱+ع^۲+ق^۲)^{\frac{3}{2}}}\ زلا\ زی$$

$$= \frac{1}{2}\int\int \frac{(فرع)^۲ + (فرق)^۲ + (ق\ فرع - ع\ فرق)^۲}{(۱+ع^۲+ق^۲)^{\frac{3}{2}}}\ زلا\ زی$$

پس کلیون کی علامت کے ماتحت ارقام ضرور مثبت ہین پس لو کی قیمت حد غائی کمی کی حاصل ہوئی

شرط قابلیت کلی

(۳۸۰) دفعہ ۳۴۴ مین ہم نے یہہ دریافت کیا ہے کہ = ۔ ایک شرط ضروری کلی کی قیمت حد غائی زیادتی یا کمی کی ہے لیکن یہہ ممکن ہے کہ بعض خاص صورتون مین ارتباط ک = ۰ کی شرائط ارزوی تطابق پوری ہوتی ہون اب ہم اس صورت کی مثال دیتے ہین اور اوسکی معنی بیان کرتے ہین

فرض کرو کہ $\int \left(\frac{ی'}{ی} - \frac{لا\ ی'^۲}{ی^۲} + \frac{لا\ ی''}{ی}\right) زلا$ کی قیمت حد غائی زیادتی یا کمی کی دریافت کرتے ہین

یہان $مو = \frac{ی'}{ی} - \frac{لا\ ی'^۲}{ی^۲} + \frac{لا\ ی''}{ی}$

$$ن = \frac{رمو}{ری} = -\frac{ی'}{ی^۲} + \frac{۲\ لا\ ی'^۲}{ی^۳} - \frac{لا\ ی''}{ی^۲}$$

$$ع = \frac{رمو}{ری'} = \frac{۱}{ی} - \frac{۲\ لا\ ی'}{ی^۲}$$

$$و = \frac{رمو}{ری''} = \frac{لا}{ی}$$

$$\text{ن} - \frac{\text{ر عو}}{\text{ر لا۲}} + \frac{\text{ر۲ ق}}{\text{ر لا۲}} = - \frac{\text{ی}}{\text{د۲}} + \frac{\text{۲ لا ی ر}^2}{\text{د۳}} - \frac{\text{لا ی}}{\text{د۳}}$$

$$- \left[- \frac{\text{ی}}{\text{د۲}} - \frac{\text{۲ ی}}{\text{د۲}} - \frac{\text{۲ لا ی}}{\text{د۲}} + \frac{\text{۴ لا ی ر۲}}{\text{د۳}} \right]$$

$$- \frac{\text{۲ ی}}{\text{د۲}} - \frac{\text{لا ی}}{\text{د۲}} + \frac{\text{۲ لا ی ر۲}}{\text{د۳}}$$

ارقام کو جمع کرنے سے یہہ دریافت ہوگا کہ

$$\text{ن} - \frac{\text{ر عو}}{\text{ر لا۲}} + \frac{\text{ر۲ فو}}{\text{ر لا۲}}$$

معدوم ہوتا ہے پس اس مثال مین ارتباط ک = ۰ از روی تطابق ہے اور اوستی کو ئی قیمت دکی نہین دریافت کرسکتے اس مثال مین یہہ دریافت ہوگا کہ

$$\text{مع مو زلا} = \frac{\text{لا ی}}{\text{د}}$$

یعنے کل مع موزلا بغیر کی قیمت مقرر کرنے کی ارقام لا مین حاصل ہوگی پس اگر ہم لا مع موزلا کی قیمت حدغائی زیادتی یا کمی کی دریافت کرنی چاہین تو $\left(\frac{\text{لا ی}}{\text{د}}\right)$ ، $\left(\frac{\text{لا ی}}{\text{د}}\right)$ کی قیمت حدغائی زیادتی یا کمی کی تحقیقات کرین اسواسطے صورت بیانیہ کلی غیر المعین کے حدغائی زیادتی یا کمی سے جسکا بیان اتنک ہوا ہے کچہہ سروکار نہین بلکہ حدغائی زیادتی یا کمی اسّی صورت بیانیہ کے دریافت کرنیکے لیے معلوم کرنی ہے کہ علامت کل سے بری ہو

اس قسم کی حد زیادتی یا کمی کے سوالات مبسوطا و مطول کتابون مین لکھی جاتی ہین چونکہ وہ کچہہ ایسی دلچسپ نہین ہین اسلئے ہم اون پر توجہ نہین کرتے

(۳۸۱) اب ہم علی العموم ثابت کرتی ہین کہ ضروری اور کافی شرط مو مین قابلیت کلی ہونیکے بغیر اسکے کہ خاص قیمت و کی ارقام لا مین مقرر کیجائی یہہ ہے کہ ک = ۰ از روی تطابق صحیح ہو صورت بیانیہ جو قابلیت کلی بغیر اسکے کہ کہسکتی ہے کہ خاص قیمت مقدار متغیر تابع کی ارقام متغیر متبوع مین مقرر کیجائی اوسکو بعض اوقات کلی بلا واسطہ کہتے ہین یا بالذات

(۳۸۲) اول ہم یہہ ثابت کرینگے کہ یہہ شرط ضروری ہے،

فرض کرو کہ مو مین لا اور و اور سر جزئیان و کی بلحاظ لا کے $\frac{\text{ر ن و}}{\text{ر لا ن}}$ ملتف ہین اگر جملہ مو کا بلا واسطہ

قابلیت کلی کی رکہتا ہی تو کلی لاامح موزلا کو اس صورت مین بیان کر سکتی ہین

مج [لا، ی، و، (رمح/رلا)، و، (ر۲ی/رلا۲)، و ۔۔۔ (رن-۱ی/رلان-۱)]

− مج [لا، و، ی، و، (رو/رلا)، و، (ر۲ی/رلا۲)، و ۔۔۔ (رن-۱ی/رلان-۱)]

اسمین صورت حملہ کی جو مح سی تعبیر ہوتی ہے اوسمین خواہ ی کی قیمت ارقام لا مین کچہہ ہی ہو تغیر نہین واقع ہوتا اب فرض کرو کہ اوسی ی کی قیمتو نمین اور اوسکی سرحزئونکی حدود غائی پر تبدل نہین ہوتا تو لاامح موزلا سے یہہ مستنبط ہوتا ہے کہ

فر لاامح موزلا = ۰

یس بموجب دفعہ ۳۴۴ کے

لاامح فری [رمو/رلا − ر/رلا رمو/ری + ر۲/رلا۲ رمو/ری۲ − ۔۔۔] رلا = ۰

فری خواہ کچہہ ہی یہہ صحیح نہین ہو سکتا جہانتک کہ

رمو/ری − ر/رلا رمو/ری + ر۲/رلا۲ رمو/ری۲ − ۔۔۔ = ۰

اور اگر یہہ ارر دہی تطابق صحیح نہ ہو تو اوسی حملہ لا کا متحقق نہین ہوتا پس اگر تو بلا واسطہ کلی کی قابلیت رکہتا ہے تو ضرور ہی کہ ارتباط ک = ۰ ارر دہی تطابق صحیح ہو

دوم اب ہم اسکا عکس ثابت کرتی ہین یعنی کہ اگر یہہ شرط متحکم ہو تو مومین قابلیت کلی بلا واسطہ ہوگی اگر اسقدر کہنا کافی سمجہا گیا ہے کہ اگر یہہ شرط متحکم ہو تو تغیر لاامح موزلا موقوف فقط لا اور ی کی حد نہائی والی قیمتون پر موقوف ہوگا اور ی کی سرحزئیات اور اسیلیو سطلی لاامح موزلا خود موقوف فقط اون حد نہائی والی قیمتون پر ہوگا یعنی قابلیت کلی بلا واسطہ رکہا ہی اب اس دعوی کا اثبات قابل اطمینان کے دوبارہ پیدا کرتے ہین فرض کرو کہ

مو = مج (لا، ی، یَ، یً، ۔۔۔)

فرض کرو کہ مو و مو دو جملے لا کے بالفعل غیر معین ہین اور سہ ایسی مقدار ہی کہ بلا واسطہ لا کے متغیر ہوتی ہے اور مومین ی کی جگہہ لو + سہ مو اور یَ کی جگہہ لوَ + سہ لوً اور یً کی جگہہ

لوٗ + سہ لوً اور علیٰ ہٰذا القیاس رکھنی سے جو موکی صورت پیدا ہوتی ہی اوسکو جح (سہ) سے تعبیر کرویں

جح (سہ) = جح (لا و لو + سہ مو و لوً + سہ موً و لوً + سہ موٗ و . . .)

طرفین کی ہر جزو کی بلحاظ سہ کے لی پس نتیجہ یہ حاصل ہوگا جسکو اسطرح تعبیر کرتے ہین کہ

جحَ (سہ) = رجح/رلوَ مو + رجح/رلوً موً + رجح/رلوٗ موٗ + ...

طرفین کی کلی سہ = ۰ سے سہ = ۱ تک لو تو

جح (۱) − جح (۰) = ∫مع [رجح/رلوَ موَ + رجح/رلوً موً + رجح/رلوٗ موٗ + . .] رسہ

یعنے بہ ازروی انطباق صحیح ہی کہ

جح (لا و لو + لو و لوً + موً و لوٗ + موٗ . . .)

= جح (لا و لو و لوً و لوٗ . .)

+ ∫مع [رجح/رلوَ موَ + رجح/رلوً موً + رجح/رلوٗ موٗ . . .] رسہ

طرفین کی کلی بلحاظ لا کے لو تو

مع جح (لا و لو + موَ و لوً + موً و لوٗ + موٗ . . .) رلا

= مع جح (لا و لو و لوً و لوٗ و . . .) رلا

+ ∫مع رسہ [مع [رجح/رلو لو + رجح/رلوً موً + رجح/رلوٗ موٗ + . . .] رلا]

اسمین آخر رقم کے اندر ترتیب کلی بلا واسطہ کی بدل گئی ہے

اور کلی بالاجزا سے

مع رجح/رلوً موً رلا = موَ رجح/رلوً − مع موَ رلا رجح/رلوً رلا

مع رجح/رلوٗ موٗ رلا = موً رجح/رلوٗ − موَ ر/رلا رجح/رلوٗ + مع موَ ر۲/رلا۲ رجح/رلوٗ رلا اور علیٰ القیاس

پس مع جح (لا و لو + موَ و لوً + موً و لوٗ + موٗ و . . .) رلا

= مع جح (لا و لو و لوً و لوٗ و . . .) رلا

+ ابع مو (رمج/رلو − ر/رلا · رمج/رلو٫٫ + ر٫/رلا٫ · رمج/رلو٫٫٫ − . . .) رسہ

+ ابع مو (رمج/رلو٫ − ر٫/رلا · رمج/رلو٫٫٫ + . . .) رسہ

+ . . . .

+ ابع رسہ [مع مو [رمج/رلو − ر/رلا · رمج/رلو٫ + ر٫/رلا٫ · رمج/رلو٫٫
− ر٣/رلا٣ · رمج/رلو٫٫٫ . . .] رلا]

اب موافق اس فرض کے کہ ارتباطاک = ۰ کی شرائط ارزوی نطابق کی خواہ د کی کچھہ ہی قیمت ہو پوری ہوتی ہین تو د کی جگہ اگر لو + سہ مو رکہین تو بہی اوسکی شرائط پوری ہونگین اور یہہ حاصل ہوگا کہ رمج/رلو − ر/رلا · رمج/رلو٫ + ر٫/رلا٫ · رمج/رلو٫٫ − . . . = ۰

چلیے لو٫ اور مو کے بالفعل ہماری اختیار مین ہین د − لو کو بجای مو کی رکہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

مع مج (لا د، د٫، د٫٫ . . .) رلا

= مع مج (لا لو لو٫ لو٫٫ . . .) رلا

+ (د − لو) ابع (رمج/رلو٫ − ر/رلا · رمج/رلو٫٫ + . . .) رسہ

+ (د٫ − لو٫) ابع (رمج/رلو٫٫ − . . .) رسہ

+ . . . . . .

پس مع مو زلا ایسی صورت بیانیہ مین ظاہر ہوگیا کہ ایک رقمون مین معمولی کلی بلحاظ لا کی ہے اور دوسرے رقومین کلی بلحاظ سہ کے ہے پس جملہ لو پہر بہی ہماری اختیار مین ہی اوسکو ایسا منتخب کرنا چاہیے کہ اوسمین جو مقادیر واقع ہون اونمین سے کوئی غیر متناہی اور غیر المعین نہ ہو یہہ ہوسکتا ہے کہ موافق اس حد کی ہم لو = ۰ کے رکہہ سکین

(۳۴۳) اب اس بات کا دریافت کرنا نہایت آسان ہے کہ ضروری اور کافی شرائط وہ کونسی ہین جنکی موافق جملہ کلی بلاواسطہ کی قابلیت ایکدفعہ سی زیادہ دفعہ قابلیت کلی بلاواسطہ کی رکہتے ہے

فرض کرو کہ مو کی معنے موافق سابق لیے ہیں

مو خواہ کچھ ہی ہو

$$\text{مع}\left[\text{مع موز لا}\right]\text{زلا} = \text{لا مع موزلا} - \text{مع لا موزلا}$$

اب تاکہ یہہ ہین قابلیت کلی بلا واسطہ کی دوسری دفعہ نہو تو وہ شرط ادری ہونی چاہئیں جیسی یہہ تحقیق ہو کہ قابلیت کلی بلا واسطہ کی ایک دفعہ ہی لس مو مین دوبارہ قابلیت کلی بلا واسطہ ہونے کے لئے شرایط ضروری اور کافی یہہ ہین کہ ارتباطات ذیل ارزوی تطابق صحیح ہون

$$\frac{\text{ر مو}}{\text{ر و}} - \frac{\text{ر ز}}{\text{ر لا}}\,\frac{\text{ر مو}}{\text{ر و}^{٢}} + \frac{\text{ر}^{٢}\text{ز}}{\text{ر لا}^{٢}}\,\frac{\text{ر مو}}{\text{ر و}^{٣}} - \cdots = ٠ \quad (١)$$

$$\frac{\text{ر مولا}}{\text{ر و}} - \frac{\text{ر ز}}{\text{ر لا}}\,\frac{\text{ر مولا}}{\text{ر و}^{٢}} + \frac{\text{ر}^{٢}\text{ز}}{\text{ر لا}^{٢}}\,\frac{\text{ر مولا}}{\text{ر و}^{٣}} - \cdots = ٠ \quad (٢)$$

اب (٢) کے یہہ ترمیم کر سکتے ہین اسواسطے کہ

$$\frac{\text{ر مولا}}{\text{ر و}} = \text{لا}\,\frac{\text{ر مو}}{\text{ر و}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{ر مولا}}{\text{ر و}^{٢}} = \text{لا}\,\frac{\text{ر مو}}{\text{ر و}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{ر مولا}}{\text{ر و}^{٣}} = \text{لا}\,\frac{\text{ر مو}}{\text{ر و}^{٢}} \cdots$$

$$\frac{\text{ر ز}}{\text{ر لا}}\,\frac{\text{ر مولا}}{\text{ر و}^{٢}} = \text{لا}\,\frac{\text{ر ز}}{\text{ر لا}}\,\frac{\text{ر مو}}{\text{ر و}^{٢}} + \frac{\text{ر مو}}{\text{ر و}}$$

$$\frac{\text{ر}^{٢}\text{ز}}{\text{ر لا}^{٢}}\,\frac{\text{ر مولا}}{\text{ر و}^{٣}} = \text{لا}\,\frac{\text{ر}^{٢}\text{ز}}{\text{ر لا}^{٢}}\,\frac{\text{ر مو}}{\text{ر و}^{٣}} + ٢\,\frac{\text{ر ز}}{\text{ر لا}}\,\frac{\text{ر مو}}{\text{ر و}^{٢}}$$

$$\frac{\text{ر}^{٣}\text{ز}}{\text{ر لا}^{٣}}\,\frac{\text{ر مولا}}{\text{ر و}^{٤}} = \text{لا}\,\frac{\text{ر}^{٣}\text{ز}}{\text{ر لا}^{٣}}\,\frac{\text{ر مو}}{\text{ر و}^{٤}} + ٣\,\frac{\text{ر}^{٢}\text{ز}}{\text{ر لا}^{٢}}\,\frac{\text{ر مو}}{\text{ر و}^{٣}}$$

انکو (٢) مین درج کرو اور ارقام جو صفر موجب (١) کے ہین خارج کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\text{ر مو}}{\text{ر و}^{٢}} - ٢\,\frac{\text{ر ز}}{\text{ر لا}}\,\frac{\text{ر مو}}{\text{ر و}^{٣}} + ٣\,\frac{\text{ر}^{٢}\text{ز}}{\text{ر لا}^{٢}}\,\frac{\text{ر مو}}{\text{ر و}^{٤}} - \cdots = ٠ \quad (٣)$$

پس (١) اور (٢) کو قایمقام (١) اور (٣) کا بناؤ

دفعہ ٥٥ کی صورت قانونیہ کی موافق ن وین کلی کسی صورت بیانیہ مفروض کے ارقام ن + ١ کلیو مین بیان ہو سکتی ہے اس صورت قانونیہ سی ہم یہہ نتیجہ نکالتے ہین کہ مو قابلیت کلی بلا واسطہ کی ن دفعہ رکہی تو یہہ شرط ضروری اور کافی ہے کہ ان صور بیانیہ مین سے ہر یک قابلیت کلی بلا واسطہ کی ایک دفعہ رکہتا ہے

$$\text{مو و لا مو و لا}^{٢}\text{ مو} \cdots \text{لا}^{ن}\text{ مو}$$

مثلاً مو قابلیت کلی بلا واسطہ تین دفعہ رکہی اسکی لئی ضرور ہی کہ سواء شرائط (۱) اور (۲) یا (۱) اور (۳) کے یہہ متطابقہ صحیح ہون کہ

$$\frac{\text{زمولا}^{۲}}{\text{ری}}-\frac{\text{ر}}{\text{زلا}}\,\frac{\text{زمولا}^{۱}}{\text{ری}^{۱}}+\frac{\text{ر}^{۲}}{\text{زلا}^{۲}}\,\frac{\text{مولا}^{۱}}{\text{ری}^{۱۱}}-\cdots=۰\quad(۴)$$

ہم (۴) کی صورت کی ترمیم کرسکتے ہین اسواسطے

$$\frac{\text{ر}}{\text{زلا}}\,\frac{\text{رمولا}^{۱}}{\text{ری}^{۱}}=\text{لا}^{۱}\,\frac{\text{ر}}{\text{زلا}}\,\frac{\text{رمو}}{\text{ری}^{۱}}+۲\text{لا}\,\frac{\text{رمو}}{\text{ری}^{۱}}$$

$$\frac{\text{ر}^{۲}}{\text{زلا}^{۲}}\,\frac{\text{رمولا}^{۲}}{\text{ری}^{۱۱}}=\text{لا}^{۱}\,\frac{\text{ر}^{۲}}{\text{رلا}^{۲}}\,\frac{\text{رمو}}{\text{ری}^{۱۱}}+۴\text{لا}\,\frac{\text{ر}}{\text{زلا}}\,\frac{\text{رمو}}{\text{ری}^{۱}}+۲\,\frac{\text{رمو}}{\text{ری}^{۱}}$$

$$\frac{\text{ر}^{۳}}{\text{زلا}^{۳}}\,\frac{\text{رمولا}^{۲}}{\text{ری}^{۱۱۱}}=\text{لا}^{۱}\,\frac{\text{ر}^{۳}}{\text{رلا}^{۳}}\,\frac{\text{رمو}}{\text{ری}^{۱۱۱}}+۶\text{لا}\,\frac{\text{ر}^{۲}}{\text{رلا}^{۲}}\,\frac{\text{رمو}}{\text{ری}^{۱۱۱}}+۶\,\frac{\text{ر}}{\text{رلا}}\,\frac{\text{رمو}}{\text{ری}^{۱۱۱}}$$

(۴) مین انکو درج کرو اور اون ارقام کو بموجب (۱) کے برابر صفر کے ہین خارج کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\text{رمو}}{\text{ری}^{۱۱}}-\frac{۳\times۲}{۱\times۲}\,\frac{\text{ر}}{\text{زلا}}\,\frac{\text{زمو}}{\text{ری}^{۱۱۱}}+\frac{۴\times۳}{۱\times۲}\,\frac{\text{ز}^{۲}}{\text{زلا}^{۲}}\,\frac{\text{زمو}}{\text{ری}^{۱۱۱۱}}-\cdots(۰)\quad(۵)$$

پس (۵) کو قایم مقام (۴) کا (۱) اور (۲) یا (۱) اور (۳) کے اقتران مین کرسکتی ہین

حدود غای کی قابلیت تغیر پر ازدیاد

(۳۸۴) حدود غای کے تغیرات کے جو سوالات لکھی ہین ہم نے اونکی ترکیب کے بیان کرنے مین تقلید شراج اور جلیٹ کی کی ہی ان دونو صاحبون کی کتابین نہایت عمدہ ہین اور جتنی ترکیبین اور ہین اون سب مین یہہ ترکیب نہایت عمدہ ہی ہم مقدار متبوع مین کچھہ تغیر نہین کرتے بلکہ صرف مقدار تابع مین کرتے ہین لیکن اکثر اور ترکیب اختیار کرنے ہین اوسکو بہی بیان کرتے ہین تاکہ طالب علم جہان کہین اوسکے مطالعہ مین اس مضمون کا اشارہ آجای سمجھہ جای فرض کرو کہ لا بدل کر لا + فزلا اور ی بدل کر ی + فزی ہوجای فزلا اور فزی نہایت ہی چھوٹی اختیاری جملے لا کے ہین مطلوب یہہ ہے کہ تغیرات $\frac{\text{زی}}{\text{زلا}}$ اور $\frac{\text{زی}^{۲}}{\text{زلا}^{۲}}$ . . . کی دریافت کرو

$\frac{\text{زی}}{\text{زلا}}$ مین جو تغیر ہو اوسکو فز $\frac{\text{زی}}{\text{زلا}}$ سے تعبیر کرو پس

ہوتا ہی تو

فرلو = لا۱مع (مو + فر) ر(لا + فرلا)/رلا زلا − لا۱مع فرمو زلا

= لا۱مع مو رفرلا/رلا زلا + لا۱مع فرمو زلا

دوسری مرتبہ کی رقم کو خارج کرد

اب مع مو رفرلا/رلا زلا = مو فرلا − مع [رمو/رلا] فرلا زلا

اسواسطے لا۱مع مو رفرلا/رلا زلا = (موفرلا)۱ − (موفرلا). لا۱مع [رمو/رلا] فرلا زلا

اسمین مو کی سرجزوی کامل کو جو بلحاظ لا کی لیجاوی [رمو/رلا] تعبیر کرتا ہے

پس فرلو = (موفرلا)۱ − (موفرلا). − لا۱مع (فرمو − رمو/رلا فرلا) زلا

اور فرمو = رمو/رلا فرلا + رمو/رو فرو + رمو/رو' فرو' + رمو/رو'' فرو'' + ...

[رمو/رلا] = رمو/رلا + رمو/رو و' + رمو/رو' و'' + رمو/رو'' و''' + ...

پس فرمو − [رمو/رلا] فرلا = رمو/رو بہ + رمو/رو' لا' + رمو/رو'' بہ'' + ...

اور آخر کو

فرلو = (موفرلا)۱ − (موفرلا). + لا۱مع (رمو/رو بہ + رمو/رو' لا' + رمو/رو'' بہ'' + ...) زلا

اب کچھہ ضرورت آگی عمل کرنی کی نہین ہے کیونکہ ہم کو نتیجہ وہ حاصل ہوگیا جو مساوی لہ دفعہ ۳۵۸ کا ہے وہان فر ہے یہان اوسکی جگہہ لا ہی اور فرلا اور فرلا. بجای زلا۱ اور زلا. کے ہین علم ہندسہ مین جہان استعمال ہو وہان یہہ دیکھنا چاہئی کہ لا۱ اور و۱ تغیر سی لا۱ + فرلا۱ اور و۱ + فرو۱ ہوجائینگی پس لا۱ + فرلا۱ تناظر لا۱ + زلا۱ دفعہ ۳۵۹ کی ہوگا

اور و۱ + فرو۱ تناظر (و + رو/رلا زلا۱) دفعہ ۳۵۹ کی ہوگا

(۳۶۰) پروفیسر جلبث کی کتابو مین اسکا بیان بہت بسط و تفصیل سی لکھا ہوا ہی نہایت دلچسپ مثالین اس مسئلہ کی علم طبیعات مین واقع ہوتی ہین جیسی کہ سوال قلیل الزمان وغیرہ کا ہی ہم ذیل مین اسی قبیل کی دلچسپ مثالین لکھتے ہین

مثالین

(۱) ایک خط منحنی کا طول معلوم ہی اور اوسکی اطراف خطوط مستقیم متقاطع پر واقع ہین تو بتاؤ جب اس خط منحنی اور اوسکی وتر کے درمیان رقبہ نہایت زیادہ ہو تو اوس خط منحنی کی صورت کیا ہوگی

(۲) ایک خط منحنی مقید احاطہ معلوم کا ایسا دریافت کرو کہ اوسکا رقبہ نہایت زیادہ سی زیادہ ہو

(۳) مطلوب یہہ ہے کہ دو نقاط قایم کو ایک خط منحنی سی جسکا طول معلوم ہو اسطرح وصل کرین کہ خط منحنی اور نقاط قایم کے محددین او محور محددین جو رقبہ گہیر آجاوے وہ حد غای بڑہادی کی رکہی اور یہہ فرض کر لیا گیا ہے کہ طول معلوم اوس طول سی زیادہ ہی جو موافق حل دفعہ ۳۶۹ کی لیا جاوی

(۴) ایک مستطیل نقبہ ہی اور اوسکی اوپر ایک ڈہکنا لگا ہوا ہی اور اس ڈہکنی کا ارتفاع معلوم ہی اور اوسکی سری عمودی ہین اوسکی صورت ایسی دریافت کرو کہ حتی الامکان اوسمین مصالح کم لگے

(۵) ایک پہاڑ کرہ کی ایک حصہ کی شکل کا ہی اور اوسپر ایک آدمی چڑہتا ہی اور اوسکی رفتار ایسی بدلتی ہی جیسا کہ دایرہ عظیمہ افقی کرہ کا ارتفاع بدلتا ہے تو ثابت کرو کہ اگر گروہ ایک مقام سی دوسرے مقام تک حتی الامکان تہوڑی وقت مین پہونچنا چاہتا ہے تو وہ اوس سطح عمودی پر چلے جسمین وہ دونو مقام واقع ہین

(۶) جب ایک سطح مستدیر منحنی ایک سطح مستوی سے دو بالقرینہ حصون پر تقسیم کیا جاوے تو فصل سطح مستوی اور مستدیر کا جب ایک ہی فصل ہو تو ایک خط نہایت کم طول کا سطح مستدیر پر ہوگا

(۷) قیمت حد غای کی

مع [(ر ر / ر لا) جب لا + (د + لا − جب لا)/جب لا] رلا کی دریافت کرو

(۸) قیمت حد غای کی ا مع (ر ر / ر لا)^۲ رلا کی ان شرایط کی ساتھہ دریافت کرو کہ

$د.=1$ اور $\lim \frac{ی}{ی_1} زلا = -1$

(۹) تغیر مع موزلا کا دریافت کر جب مو ایک جملہ لا اور ی اور $\frac{ری}{زلا}$ اور $\frac{ر^2ی}{زلا^2}$ ...... وغیرہ کا ہے اسمین مو = مع مو = زلا اور مو بھی ایک جملہ لا اور ی و $\frac{ری}{زلا}$ اور $\frac{ر^2ی}{زلا^2}$ .. کا ہے

(۱۰) صو کو لابمع $\sqrt{(1+ع^2)}$ زلا سے تعبیر کرو اور مج (صو) کو جملہ صو کا فرض کرو تو وہ ارتباط لا اور ی کی درمیان دریافت کرنا مطلوب ہے کہ بمع مج (صو) زلا کی حد غائی زیادتی یا کمی پر اوس حالت مین پہونچا ہی کہ بمع $\sqrt{(1+ع^2)}$ زلا کی قیمت معلوم رکھی اور ط ایک مقدار معلوم رکھی ایک خاص صورت کی واسطے مج (صو) = صو کے فرض کرو

(۱۱) وہ خط منحنی دریافت کرو کہ جسکے نقطہ پر

$$\left[د + (م - لا) \frac{ری}{زلا} \right] \left[د + (ن - لا) \frac{ری}{زلا} \right]$$

حد غائی زیادتی یا کمی کی رکھے

(۱۲) وہ خط منحنی دریافت کرو کہ جسکے ہر نقطہ پر د $\frac{ری}{زلا}$ حد غائی زیادتی یا کمی کی رکھی اور ی اور $\frac{ری}{زلا}$ کے تغیرات ایسے مقرر کئے گئے ہین کہ کسی نقطہ پر د لا - ی $\frac{رلا}{ری}$ مین کوئی تبدل تغیر مین نہ واقع ہو۔

(۱۳) دفعہ ۳۶۵ کو اس بات کی ثابت کرنی مین استعمال کرو کہ دفعہ ۳۵۲ مین جو نقطہ فرض کیا گیا ہے یعنے خط منحنی مطلوب سوال قلیل الزمان مین سطح عمودی مین واقع ہوتا ہی جسمین دو نقاط معلوم واقع ہوتی ہین

(۱۴) پیمائش مجسم مستدیر جسکی سطح مستدیر کا رقبہ معلوم ہے محور پر جسکا طول معلوم ہی بنایا گیا ہے اوسکی صورت ایسی ہے کہ ضرب اوسکی عدم استحالہ کی محور کی گرد حد غائی زیادتی کی رکھتی ہی تو ثابت کرو کہ عمود المماس سے نقطہ پر خط منحنی کا جسکی گردش مجسم مستدیر پیدا ہوتا ہے سہ چند لمبا نصف قطر انحنا سے ہوتا ہے

(۱۵) ایک حجم معلوم مادہ معلوم کا ایک مجسم مستدیر کی صورت مین ایسا بنایا گیا کہ محور افقی جو عمود

محور شکل پر ہے اوقت تقلیل جو نیچی کا نہایت ہی کم ہے پس صورت مجسم کی دریافت کرو

(۱۶) ایک برتن کا سماؤ معلوم ہے اور اوسکی صورت سطح مستدیر سی پیدا ہوتی ہے اور اوسکی سطح مدور مین اور اوسمین بے تحریک مایع بہر آیا ہے اور اوسپر کشش کا اثر نہین فرض کیا گیا ہے تو صورت ظرف کی ایسی تحقیق کرو کہ کل داب جو اوسپر اثر کرتا ہے کم از کم ہو اور مقدار مدور سطحون کی معلوم ہے ماحصل خط منحنی ظرف کا پیدا کرنیوالا محیل ہے

(۱۷) حساب تغیرات سی مساوات تراش متقاطع ایک خط مستقیم اور نہر کی اوس حالت مین دریافت کرو کہ تین مقادیر سطح اور ظرف اور عمود المماس مین عمود المماس علم آب کی داب کا جو حد غائی زیادتی کی رکہی یا حد غائی کمی کی اور باقی دو معلوم ہون اور کنارہ آب کی سطحین اور داب حساب مین نہین لگاتے

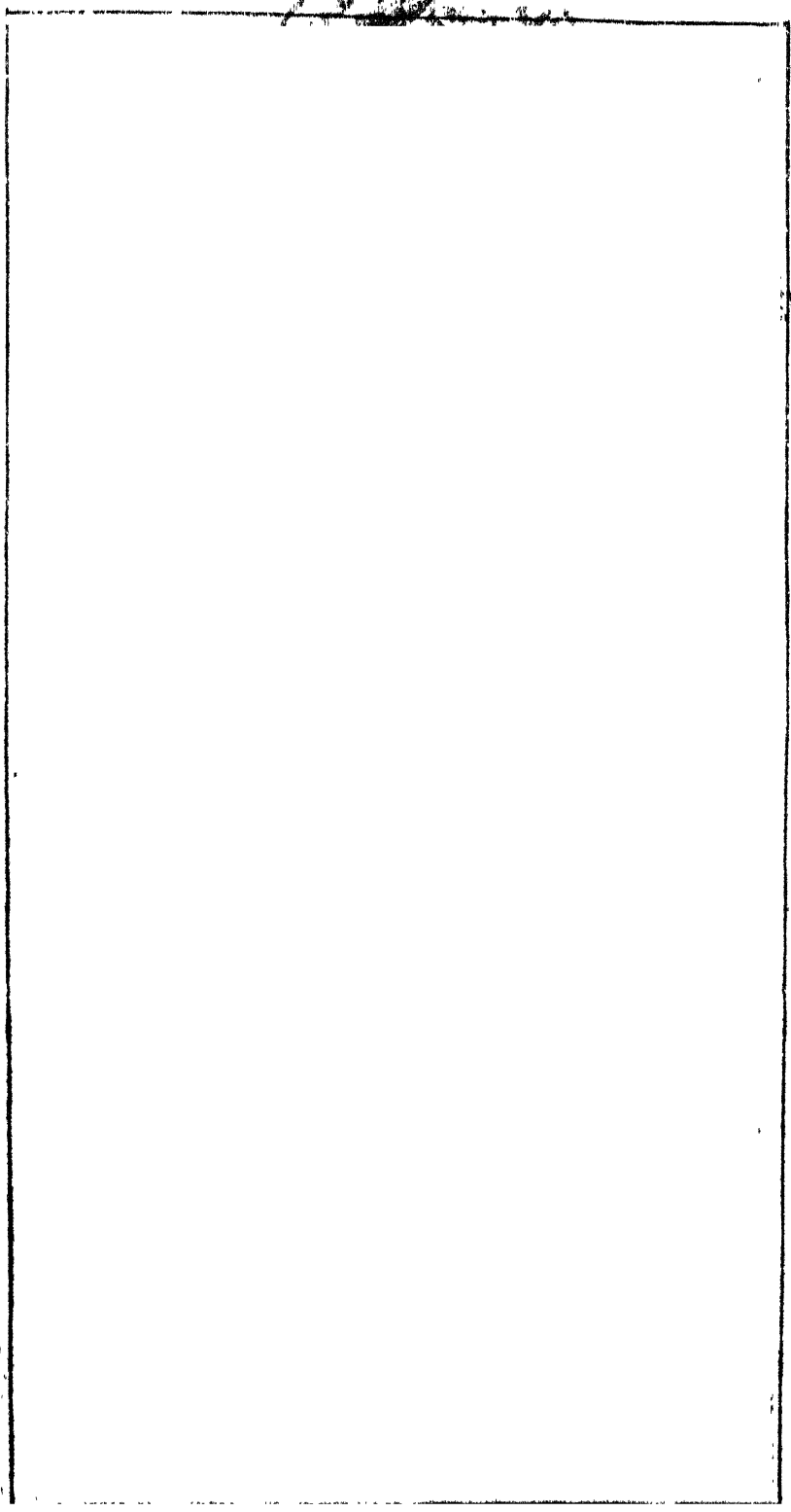
یہہ بہی ثابت کرو کہ جس سطح مستدیر پر حد غائی کمی کی رکہی اور صرف ظرف معلوم تو تراش مدور ہوگی اور جب عمود المماس داب کا حد غائی کمی کی رکہی تو تراش محیل ہوگی اگر سطح مستدیر معلوم ہو اور دو خط مستقیم ہونگی اگر ظرف معلوم ہو

(۱۸) اگر دو خطوط منحنی ہون اور انکی محدب کا رخ ایک ہی جانب مین ہو اور ایک ہی اطراف پر ختم ہوتی ہون تو ایک ذرہ جو صرف کشش متصل کے سبب سے متحرک ہو وہ اوپر کے خط منحنی کو زیادہ عرصہ مین بہ نسبت نیچے کے خط منحنی کے طے کریگا اور ابتدائی رفتار دونو خطوط منحنی پر یکسان فرض کی گئی ہے

(۱۹) فرض کرو کہ ایک جہاز کی رفتار سمندر پر چلنے کی ایک جملہ اوس زاویہ کا ہی جو سمت جہاز کے ہوا کی سمت کے ساتھہ بناتی ہی تو ثابت کرو کہ قلیل الزمان راہ دو معلوم مقامون کے درمیان قایم الزاویہ ہے اور اگر راہ اوسکی خط مستقیم نہ ہو جو اون دو مقامون کے درمیان ملایا جاوے تو وہ ہمیشہ دو سمتوں مین ہوگی جو ایک ہی زاویہ ہوا کی سمت کے ساتھہ بناتے ہین —

(۲۰) مجسم مستدیر جسکی سطح مستدیر معلوم ہی نہایت بڑی جسامت کا دریافت کرو اور یہہ سطح

مستدیرہ محور گردش کو دو نقاط معین قطع کرتی اور یہ فرض کرلیا ہے کہ سطح مستدیر معلوم
برابر دس کرہ کے سطح مستدیر کے نہین ہی کہ جسکا وہ قطر ہو کو دو نقاط معین مین ملایا جاے

تمام شد

فہرست مضامین علم حساب الکلیات